

令和 6 年 5 月 15 日現在

機関番号：17102

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2022～2023

課題番号：22K20338

研究課題名（和文）次元が無限大に発散する空間列の幾何解析的な収束理論の展開

研究課題名（英文）Development of convergence theory for sequences of spaces whose unbounded dimension from the aspect of geometric analysis

研究代表者

数川 大輔 (Kazukawa, Daisuke)

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：40963202

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、測度の集中現象を基にした集中位相による測度距離空間列の収束を考え、各空間の上に定まる幾何解析的な量の挙動について調査を行った。集中位相は次元が無限大に発散する空間列に対しても広く収束を許容し、空間列の高次元挙動や極限に現れる無限次元空間にもアプローチが可能である。本研究では、測度距離空間の不変量に関する基礎理論を固め、実際に分散やポアンカレ定数などの量が良い不変量であることを示した。また従来は球面などリーマン幾何学的な対象を主として無限次元極限が研究されてきたが、コーシー分布という正規分布とは全く異なる確率モデルでも極限を決定し、研究領域を飛躍的に広げること成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、空間列の高次元挙動および無限次元極限を調査し、不変量を用いた無限次元極限の区別や新しいモデルの無限次元極限の決定などを行った。これらの成果は新たな研究の流れを構築し、研究領域を広げたとして学術的に高く評価されている。特にリーマン幾何学的な対象のみならず、高次元の確率分布やブラウン運動などを収束理論の対象として取り入れられることを指摘した意義は非常に大きい。従来以上に確率論や統計学とも密接に関係した理論に発展することが今後期待される。また本研究では、従来にない斬新な結果のみならずそれらを含む基礎理論の見直しにも取り組み、理論の体系化にも力を入れている。

研究成果の概要（英文）：In this study, we consider the convergence of sequences of metric measure spaces with respect to the concentration topology, which is based on the concept of concentration of measure phenomenon, and investigate the behavior of geometric analytic quantities. The convergence notion induced by the concentration topology is effective in capturing the high-dimensional aspects of spaces, and it is also interesting as a generalization of the celebrated measured Gromov-Hausdorff convergence. In our research, we develop a general theory of invariants for metric measure spaces and prove that the variance, the Poincaré constant, etc., are “good” invariant. We applied them to a classification problem for the infinite-dimensional limit spaces. We also determine the limit of the generalized Cauchy distribution as the dimension diverges to infinity under suitable scaling. This discovery extends the scope of this study beyond the Riemannian geometry.

研究分野：測度距離空間の収束理論

キーワード：測度距離空間 集中位相 測度の集中現象 次元が無限大に発散する空間列 ピラミッド 無限次元極限 主束構造 Cauchy分布

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

測度距離空間の収束理論の研究が近年急速に発展している。測度距離空間はリーマン多様体の収束・崩壊理論において、リーマン多様体の極限空間として登場し、昨今では測度距離空間自体の上で幾何学や解析学が展開できるようになっている。測度距離空間の収束概念として最も有名な測度付きグロモフ-ハウスドルフ収束の研究は、深谷やグロモフに始まり、今や非常に良く纏められ、測度距離空間の幾何解析において重要な役割を果たしている。

他方で、レヴィヤミルマンによる測度の集中現象の研究を基にグロモフは2つの測度距離空間の間のオブザーバブル距離を定義し、独自の収束理論を展開した。測度の集中現象とは、高次元空間に特有の測度の偏り現象のことで、任意の1-リップシッツ関数が測度的にほぼ定数になることとして定式化される。オブザーバブル距離による位相は集中位相と呼ばれ、測度付きグロモフ-ハウスドルフ収束よりも(遥かに)弱い収束を与え、次元が無限大に発散する空間列に対しても良い収束性を持つという特徴がある。集中位相に関する収束理論は測度付きグロモフ-ハウスドルフ収束に比べて困難が多く、未だ発展途上である。

また、集中位相の研究において、グロモフはある自然なコンパクト化を導入している。このコンパクト化の元をピラミッドという。ピラミッドは測度距離空間の一般化として、無限次元ガウス空間などの無限次元的な対象を豊富に含む興味深い枠組みである。近年、塩谷による球面や射影空間の無限次元極限の研究を始めとして、様々な空間列のピラミッドとしての収束性が明らかになっている。一方で、一見定義の異なる2つのピラミッドが実際に相異なるかという問題は、ピラミッドの収束理論において課題になっていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は「集中位相に関する幾何解析的な量の収束理論を発展させること」である。特に、測度距離空間やピラミッドの不変量の挙動を調査し、空間を区別する問題に不変量を用いたアプローチを行う。具体的な空間列の無限次元極限の決定問題を考える際に、極限空間が1点空間まで集中していないか、または、消散現象という空間が散り散りになる現象は起こっていないかを判定するのは重要であり、極限のピラミッドの不変量を調べるという流れは自然である。不変量を活かして、様々な空間列の無限次元極限の決定問題にも取り組む。また、測度距離空間およびピラミッド全体の空間の幾何学的性質との関係性も予想されるため、全体空間の幾何学も調査を行う。その他にも広く集中位相の理解となる研究を行う。

3. 研究の方法

本研究開始とほぼ同時期に、測度距離空間の不変量が、リップシッツ順序という測度距離空間の順序関係に関して単調であり、集中位相に関して下半連続であるとき、自然にピラミッドの不変量として拡張できることを発見した。特に、分散やポアンカレ定数などの幾何解析的な量がこの枠組みに属しており、ピラミッドの不変量となっている。ここで、集中位相に関する下半連続性の証明は通常容易ではなく、測度距離空間の不変量をよく調査し、場合によっては再定義し、ピラミッドの不変量として導入を行う必要がある。このクラスの不変量の一般論の構築を行い、これらを用いて、具体的なピラミッドの区別を行う。

また、具体的な空間列の無限次元極限の決定問題では、従来リーマン幾何学的な対象が中心的に取り扱われている。球面列は適切なスケールで無限次元ガウス空間に弱収束するが、これはある種の中心極限定理であるから、正規分布でない確率分布をモデルとした極限定理が従来とは異なる収束現象を見せると予想されるので、確率分布に着目した無限次元極限を考察する。

さらに、全体空間の幾何学に対しては、直近に位相的性質について調査を行っていたが、次にスケーリング作用に関する構造が興味深いのでこれについて調査する。

4. 研究成果

測度距離空間およびピラミッドの不変量について、福岡大学の江崎氏・三石氏と共同で研究を行った。我々は、リップシッツ順序に関して単調であり、集中位相に関して下半連続であり、さらに測度距離空間の(距離に関する)スケーリングに関して斉次であるような測度距離空間の不変量のクラスを調査した。まず、このクラスの不変量がピラミッドの不変量に自然に拡張され、さらにピラミッドの位相に関して下半連続になることを示した。さらに分散やポアンカレ定数、オブザーバブル直径がこのクラスに属する不変量であることを明らかにし、無限次元ガウス空間と無限次元立方体に関してこれらの量を決定または評価することで、無限次元ガウス空間と無限次元立方体が実際に相似でない(たとえスケールしても一致しない)ことを示した。これはピラミッドを区別・分類するという問題において重要な一歩である。また、我々は測度のアトムに注目することで、測度距離空間に対応しないピラミッド全体の位相次元が無次元であること

も証明した。加えて、不変量に対する一般論を構築し、このクラスの不変量によって全てのピラミッドが区別可能であるという結果も得ている。

引き続いて、江崎氏・三石氏と共同で、(多変量)コーシー分布を持つユークリッド空間の無限次元極限の決定問題を解決した。コーシー分布は、正規分布と同様によく知られた確率分布である。正規分布との決定的な違いは、遠方で多項式減衰しかならないことであり、これにより中心極限定理の枠組みからも外れてしまう。一方で、コーシー分布は非負の重み付きリッチ曲率を持つなど幾何学的に良い性質を持つことが知られていた。実際、適切にスケールしたコーシー分布を持つユークリッド空間の次元を無限大に発散させた極限は1次元の半直線になることが判明した。この結果は正規分布の場合などの従来の結果とは大きく異なる現象であり非常に興味深い。測度の集中現象は、任意の1-リプシッツ関数がほとんど定数関数になる現象であったが、コーシー分布に対しては、任意の1-リプシッツ関数がほとんど動径関数になっていることが観測され、本結果の鍵となった。またこの事実は重み付きリッチ曲率の挙動とも関係し、コーシー分布の幾何学的側面を強く反映している。さらに、我々はこのコーシー分布の例を一般化し、収束する空間列に対する錐の列の収束という一般論も構築した。錐の列の収束は汎用性が高く、空間列の収束の1つの型として多くの例を含んでいる。

コーシー分布を持つユークリッド空間の無限次元極限の解決をきっかけに、様々な確率分布に対して、調査を行った。特に、t分布、安定分布、極値分布などの確率分布を持つユークリッド空間の無限次元極限を調査したが、これらの一般化では確率分布毎に振る舞いが大きく変わることが判明し、それに伴う困難がいくつか生じている。この問題については、具体的な問題点や予想を挙げ、現在も調査中である。

不変量の振る舞いに関連して、測度距離空間およびピラミッド全体の空間の幾何学についても調査を行った。この研究は東北大学の塩谷氏と愛媛大学の中島氏との共同研究である。我々は本研究以前に、測度距離空間およびピラミッド全体の空間の位相的性質について調査を行っており、局所コンパクト性、コンパクト性、ベール性、大域可縮性、測地性、局所弧状連結性の有無に関する結果を得ていた。本研究ではさらに測度距離空間およびピラミッド全体の空間上に定まるスケール作用に関して調査を行った。全体空間はスケール作用に沿って可縮であるが、この作用の商空間の成す開錐に同相でないという結果が得られた。さらに、この作用の唯一の固定点である1点空間を除いたところでは、スケール作用は非自明かつ局所自明な主束構造を誘導するという驚くべき結果が得られた。一般に、底空間がパラコンパクトハウスドルフ空間で、ファイバーが可縮である局所自明な主束は自明であるという事実があるが、この作用による商空間はパラコンパクトでないので矛盾しない。測度距離空間およびピラミッド全体という自然な空間上のスケール作用という自然な作用が誘導する構造は非常に病的であることが判明した。このような“巨大な”距離空間の性質は一般トポロジーの観点からも注目されている。さらに、主束の位相構造についても、全空間の可縮性が得られ、底空間の任意のホモトピー群が自明であることも判明している。また、主束構造の不変量への応用として、測度距離空間の不変量であって、正の有限値かつ連続かつスケール作用に関して斉次なものは存在しないことが得られている。

また、本研究の計画をより発展させ、江崎氏・三石氏と共同で、新たにブラウン運動に対応する測度距離空間および極限のピラミッドの研究にも取り組んだ。ブラウン運動を有限個の時刻で観測することにより、各時刻での位置が確率的に得られる。その位置データから有限次元の測度距離空間ができるがその極限ピラミッドとブラウン運動のサンプルパス全体の空間との関係について研究した。本研究は収束理論の新たな可能性として重要視している。実際、ブラウン運動の研究で既に知られていたことを収束理論の言葉で書き直し、この関係性をある程度まで表現することが出来ている。この結果は次の研究のスタート地点として重要な役割を果たすと考えている。

< プレプリント等 >

Daisuke Kazukawa, Hiroki Nakajima, Takashi Shioya, Principal bundle structure of the space of metric measure spaces, arXiv:2304.06880.

Syota Esaki, Daisuke Kazukawa, Ayato Mitsuishi, Convergence of cones of metric measure spaces and its application to Cauchy distribution, arXiv:2402.14331.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kazukawa Daisuke	4. 巻 252
2. 論文標題 Convergence of metric transformed spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 243 ~ 290
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-022-2348-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 KAZUKAWA Daisuke, SHIOYA Takashi	4. 巻 76
2. 論文標題 High-dimensional ellipsoids converge to Gaussian spaces	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 473 ~ 501
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/86648664	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Esaki Syota, Kazukawa Daisuke, Mitsuishi Ayato	4. 巻 442
2. 論文標題 Invariants for Gromov's pyramids and their applications	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 109583 ~ 109583
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2024.109583	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazukawa Daisuke, Nakajima Hiroki, Shioya Takashi	4. 巻 218
2. 論文標題 Topological aspects of the space of metric measure spaces	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 68 ~ 68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10711-024-00921-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 数川大輔
2. 発表標題 測度距離空間全体のスケールリング作用に関する主束構造について
3. 学会等名 測地線及び関連する諸問題（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 数川大輔
2. 発表標題 測度距離空間全体のスケールリング作用に関する主束構造
3. 学会等名 第18回代数・解析・幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 数川大輔
2. 発表標題 測度の集中現象に基づく測度距離空間の収束理論
3. 学会等名 数学と諸分野の連携に向けた若手数学者交流会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 数川大輔, 中島啓貴, 塩谷隆
2. 発表標題 測度距離空間全体の位相的性質について
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 数川大輔, 中島啓貴, 塩谷隆
2. 発表標題 測度距離空間全体のスケーリング作用に関する主束構造について
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 数川大輔
2. 発表標題 測度距離空間全体のスケーリング作用に関する主束構造
3. 学会等名 Geometry and Topology (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kazukawa Daisuke
2. 発表標題 Convergence of cones of metric measure spaces and its application to Cauchy distribution
3. 学会等名 Geometry and Probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 数川大輔
2. 発表標題 測度距離空間全体のスケーリング作用に関する主束構造
3. 学会等名 第70回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 数川大輔
2. 発表標題 測度の集中現象に基づいた測度距離空間の収束理論
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 数川大輔
2. 発表標題 測度距離空間の錐の収束とCauchy分布への応用
3. 学会等名 福岡大学微分幾何研究集会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 数川大輔
2. 発表標題 Convergence of cones of metric measure spaces and its application to Cauchy distribution
3. 学会等名 測地線及び関連する諸問題（招待講演）
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------