

令和 6 年 4 月 27 日現在

機関番号：17102

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2022～2023

課題番号：22K20341

研究課題名（和文）SLEを拡張する共形不変確率場に対する横断的理論の構築

研究課題名（英文）Construction of cross-sectional theory on those conformally invariant random fields which extend SLE

研究代表者

村山 拓也（Murayama, Takuya）

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：70963974

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,400,000円

研究成果の概要（和文）：シュラム・レヴナー発展（Schramm-Loewner evolution, SLE）の深い解析を目標に、確率論・函数論双方の観点から研究を行った。課題の主眼は、穴の開いていない平面領域からより一般の領域へSLEの数学的定義を拡張する方法であった。これについて共著で図書を出版し、かねてからの研究の基礎をより明確・堅固なものとした。また、研究交流の機会を増やすことに努め、その結果、レヴナー微分方程式の新たな応用や問題意識を見出すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

SLEは統計物理における2次元の古典スピン系の臨界現象を記述する上で重要とされる確率過程である。複素解析におけるレヴナー微分方程式をランダムなブラウン運動で駆動して得られることが特徴であり、数理物理への寄与という意味でも、確率論・函数論の非自明な関係の開拓という意味でも興味深い。特に本研究は、レヴナー微分方程式の適用範囲を上げたり、古典的に知られた設定を新たな視点で捉え直したりといった、基礎理論への寄与の点で意義を持つ。

研究成果の概要（英文）：Aiming at deep analysis of Schramm-Loewner evolution (SLE), we implemented research from perspectives of probability theory and complex analysis. Our main interest was how to extend the mathematical definition of SLE from simply connected planar domains to more general domains. In that direction, we published a book with two co-authors and made the foundation of our study clearer and solidier. In another direction, we made effort to increase opportunities of research communication and, as a result, recognized new applications and problems on the Loewner differential equations.

研究分野：確率論，複素解析

キーワード：小松・レヴナー微分方程式 藤りブラウン運動 レヴナー微分方程式 シュラム・レヴナー発展

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

統計物理学における2次元の臨界現象を記述する数学的道具として2000年以降、シュラム・レヴナー発展 (Schramm-Loewner evolution, SLE) なる確率過程が注目を集めている。これは円板あるいは上半平面の境界を出発するランダム曲線 (あるいはより一般の増大閉集合族) であり、ランダムな駆動項を持つレヴナー微分方程式によって記述される。この微分方程式そのものは、複素解析における単葉函数の極値問題に関わって興味を持たれてきたが、近年はこのSLEへの応用という観点からも研究されるようになってきた。

上記の流れの中で、円板や上半平面といった基礎の平面領域を取り換える方向性が研究されてきた。特に「穴」の開いた多重連結平面領域あるいはより一般のリーマン面を考えると、複素解析の理論は異なる様相を呈し、いくつかの困難が生じる。従前、レヴナー方程式やSLEの一般化が考察されてきたが、今述べた困難のために、そうした研究は異なる立場から散発的になされ、数も少なかった。

### 2. 研究の目的

研究代表者が以前から研究に取り組んできた小松・レヴナー微分方程式を一つの足掛かりとして、上述した既存の散発的な先行研究を統合し、一般の領域におけるSLEについての横断的理論を構築することを目指す。そのために、小松・レヴナー微分方程式および元々のレヴナー微分方程式に関する基礎理論の整備、SLEの分布の性質についてのさらなる理解を図る。

### 3. 研究の方法

まず、小松・レヴナー微分方程式に関する基礎理論の整備に取り組む。特に、この方程式が生成する増大集合族と領域の内部境界 (穴) との相互作用を解析する適切な方法を模索する。そして、この方程式と駆動項の確率微分方程式とを組にした系が定めるランダム増大集合族の分布を研究する。関連研究において異なる3つの立場から定義される分布と我々の分布とを比較し、理論全体の中でそれらが果たす役割を整理する。

研究を進めるにあたっては、確率論・函数論の様々な研究の動向を見ながら、有効な解析手法の発見、研究の方向性の適切な舵取りに努める。そのために、国内の多くの研究集会に参加して最新の結果について情報収集・研究交流をし、また講演をして各々の分野の専門家からのフィードバックを得る。

### 4. 研究成果

上記した研究の方法については、以下の項目(2)で述べるように、当初の想定以上の困難があり、計画を完遂するには至らなかった。一方で、項目(3)、(4)は本研究の計画時には予期しなかった話題であるが、上述した情報収集・研究交流の中で触れることとなった興味深い研究の方向であり、それぞれ発展が期待される。

(1) 小松・レヴナー微分方程式に関する一連の研究を総括する図書を共著で出版した。その中で、方程式の既存の導出法にさらなる改善が加えられるなど、過去の結果が洗練された。また、等角写像の時間発展を表す確率過程の可測性に関する新たな証明が追加された。このように、今回出版された図書は今後の研究の基礎たりうるものとなった。

(2) 小松・レヴナー微分方程式が生成する増大閉集合族が、内部境界と交わるか否かの判定法について検討した。当初、このような判定法を得るために、SLEの跡の複雑さを調べる際に用いられるボレル・カンテリ型の議論、あるいは、極値的長さにより内部境界との近さを評価する形の議論などを想定していたが、これらの議論では結論を得られなかった。この検討を通じて、各々の方針における困難な点が以前よりも明確になりつつあるため、引き続き対数容量や種々の計量との関係といった観点から可能な方法を模索していきたい。

(3) レヴナー微分方程式を一般化したレヴナー微分積分方程式の研究に取り組んだ。先行研究では円板上の等角写像族に対する方程式が一般化されたが、本研究では、その先行研究の著者たちとともに、上半平面における一般化を行った。これにより、時間発展の様子が時刻に対して絶対連続とは限らないより一般の状況を扱えるようになった。また応用として、非可換確率論における単調独立増分過程に対するレヴィ・ヒンチン表現に相当する解析的量と、レヴナー微分積分方程式に現れる特徴量との一対一対応について研究した。これらの研究については、現在も進行中であり、近い将来に論文として投稿・出版を目指す。

(4) 複数の「指」を持つレヴナー微分方程式やそのランダム版である多重SLEにおいて近年、定数係数が現れる場合の研究が盛んである。このような定数係数の方程式を得るためには径数の適切な変更が必要であるが、そのような時間変更函数が満たす常微分方程式の解の存在・一意

性について検討した。特に、この方程式は一般にリプシッツ条件を満たさないため、過去の研究から期待されるような一意性が自明ではないということを確認した。一方で、多重 SLE を考える際には、一意性がある状況が望ましく、そのような状況では時間変更関数がマルチパラメータに関する停止時刻となり、マルチパラメータマルチンゲール理論や通常の伊藤解析の適用が許されるという点について認識した。これらの事実については、その重要性に比して研究が非常に未熟な現状であり、今後さらなる理論の整備を進めていきたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Takuya Murayama
2. 発表標題 Loewner chains and evolution families on parallel slit half-planes
3. 学会等名 Stochastic Processes and Related Fields (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 村山拓也
2. 発表標題 非可換Levy過程・加法過程と正則函数の半群・Loewner鎖
3. 学会等名 ランダム行列と自由確率論 workshop 2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takuya Murayama
2. 発表標題 Some recent results on chordal Komatu-Loewner equation
3. 学会等名 Geometric Function Theory in Several Complex Variables and Complex Banach Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 村山拓也
2. 発表標題 multi-finger Loewner微分方程式とmultiple SLEに対する時間変更の方法
3. 学会等名 関西大学確率論研究会2024 (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 村山拓也
2. 発表標題 multi-finger Loewner微分方程式とmultiple SLEに対する時間変更の方法
3. 学会等名 福岡複素解析シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 村山拓也
2. 発表標題 Loewner方程式について
3. 学会等名 第56回函数論サマーセミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 村山拓也
2. 発表標題 Loewner chains and evolution families on parallel slit half-planes
3. 学会等名 「等角写像論・値分布論」合同研究集会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Zhen-Qing Chen, Masatoshi Fukushima, Takuya Murayama	4. 発行年 2023年
2. 出版社 World Scientific	5. 総ページ数 256
3. 書名 Stochastic Komatu-Loewner Evolutions	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Takuya Murayama  
<https://sites.google.com/view/tmurayama-math/ja>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------