

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 23 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(S)

研究期間：2011～2015

課題番号：23224001

研究課題名(和文)幾何学的モジュライ理論の深化と理論的応用

研究課題名(英文)Geometric moduli theory and its theoretical applications

研究代表者

中村 郁(Nakamura, Iku)

北海道大学・・・名誉教授

研究者番号：50022687

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 139,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、幾何学的なモジュライ空間の大域的な構造を研究し、関連する理論への応用を目指した。アーベル多様体のモジュライ空間の第二のコンパクト化を構成し、他の重要なコンパクト化との関係を解明、代数曲線のベクトル束のモジュライ空間のゼータ関数に関するリーマン予想の証明、トーリック多様体のラグランジュ部分多様体のモジュライ空間を研究し、ミラー対称性における量子コホモロジー環とポテンシャルのヤコビ環の同型を証明、代数曲線のベクトル束のモジュライ空間を用いて、パンルヴェ微分方程式を特徴付ける、などの成果があった。また、統計経済学のアローの不可能性定理を超平面配置によって解釈し一般化、発展させた。

研究成果の概要(英文)：In this project we aimed at studying global structures of certain geometric spaces so that we may apply them to the related mathematical theories. The main results of our studies are 1) construction of the second compactifications of moduli spaces of abelian varieties, and study of the relation with the other important compactifications, 2) proof of Riemann hypothesis for some of zeta functions of the moduli spaces of semi-stable vector bundles over an algebraic curve, 3) a characterization of one of Painleve differential equations through the study of stable vector bundles of rank two, 4) proof of the isomorphism between the quantum cohomology ring and the Jacobi ring of a potential in mirror symmetry through the study of the moduli space of Lagrangian submanifolds of a toric manifold, 5) generalization and further study of Arrow's impossibility theorem in statistical economics in terms of hyperplane arrangement.

研究分野：代数幾何学

キーワード：モジュライ コンパクト化 安定性 パンルヴェ方程式 フレア理論 ミラー対称性 超平面配置 ゼータ関数

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 代表中村郁は、アーベル多様体のモジュライ空間の整数環上の(第一の)コンパクト化を整数環上の良素点で構成し、安定性を論じた。このほか、特異点に関するマッカイ対応をモジュライ空間を用いて研究した(1999)。

(2) 分担者の岩崎は2006年の稲葉、斉藤(ともに代数幾何)との共著でパンルヴェ方程式のモジュライ論的定式化を与えた後、2007年上原(代数幾何)と共著でパンルヴェVI方程式を研究した。

(3) 分担者の小野は、深谷との共著論文(1999)で、『閉じたシンプレクティック多様体のハミルトン写像の不動点が全て非退化ならば、(不動点の個数の上限に関する)ベッチ数版アーノルド予想は正しい』ことを証明した。

(4) 分担者の寺尾はミクロ経済学の社会選択論のアローの不可能性定理を超平面配置の定理(部屋数公式)として解釈し一般化した(2007)。

(5) 分担者の翁林(Lin Weng)は、代数曲線の安定ベクトル束のモジュライ空間のゼータ関数を定義し研究した。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、さまざまな幾何学的なモジュライ空間のコンパクト化を構成し、その大域的な数学的構造を深く研究し、関連する数学理論に应用することである。主要テーマは以下に記すが、曲面やベクトル束のモジュライ空間、ヒルベルト・スキームや $p$ 進解析など、関連する問題も連携研究者とともに研究する。

(1) アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化を整数環上に構成し、数論的に应用(代数幾何の数論への応用)をめざす。良素点でのアーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化を詳しく記述する。また $G$ 軌道ヒルベルト・スキームにより、マッカイ対応を研究する。

(2) 階数2の安定な放物接続のモジュライ空間のコンパクト化を、パンルヴェ方程式に应用(代数幾何の微分方程式への応用)、代数曲面上の正エントロピーの力学系を研究する。解の解析接続に伴う力学系のカオス的構造、パンルヴェ性の幾何学的研究を行う。また、Gaussの超幾何関数などの研究を行う。

(3) シンプレクティック多様体の上の安定な正則写像のモジュライ空間のコンパクト化とフレア・ホモロジー理論

(微分方程式の微分幾何学への応用)を用いて、ラグランジュ・フレア理論(微分幾何)とポテンシャル関数の変形理論の間のミラー対称性、ないし、ギベントールのミラー対称性理論(代数幾何、物理学)の間の関係を明らかにする。

(4) 超平面配置の代数的な研究により、超幾何級数、超平面配置の補空間や原始積分の理論の深化を目指す。超平面配置理論を社会科学へ応用する。

(5) 代数曲線の半安定ベクトル束のモジュライ空間を用いて、新しい非可換ゼータ関数を導入し、詳細に研究してモチーフ的な解釈を与える。(代数幾何学の数論への応用)

## 3. 研究の方法

分担者に加え、多くの連携研究者の協力の下に研究を進める。研究テーマに応じて研究グループを構成し、北海道大学の数学科の数論幾何学セミナーが中心となって他のグループと連絡を取り合う。数論幾何学セミナーでは、ひろく外国人を含む講演者を招聘し、基本的な結果や最新成果の情報収集および研究を行う。このほかに、国際研究集会を開き、情報交換する。

## 4. 研究成果

(1) 中村郁により、アーベル多様体のモジュライ空間の第二のコンパクト化がすべてのレベルで構成された。一般レベルで第二のコンパクト化とアレクセエフのコンパクトモジュライ空間とをすべての次元、すべてのレベルで比較研究した。前者は後者にかかなり自由に埋め込めることを証明。次元が等しい唯一の場合、つまり、主偏極の場合には同型が得られた。第一のコンパクト化は第二のコンパクト化と単射双有理同値であり、既知のコンパクト化の関係はかなり明らかになった。

(2) 石井亮-中村郁により、導来圏を用いて、2次元商特異点のマッカイ対応をくわしく研究した。従来のイデアル積の具体的な計算による、マッカイ対応の説明を、より一般の原理から説明した。また、局所マッカイ対応の大域化が得られた。このほか、石井亮は「繰り返し Hilbert scheme」が、ある安定性パラメータによる安定  $G$ -不変スキームのモジュライ空間であることを証明し、いくつかの関連する問題も解決した。

(3) 翁林は有限体上の代数曲線に対して、半安定ベクトル束のモジュライ空間上の積分として、非可換ゼータ関数と代数群ゼータ関数を定義、基本的な性質を調べた。ほかに類似の積分を定義、モチーフ的に一般化した漸化式を与えた。また、モチーフ的なオイラー積と

モチーフ的なアデル測度を導入、基本的な性質を調べ、理論的な基礎付けを与えた。

- (4) 翁林は Zagier と共同で、楕円曲線の非可換ゼータ関数に対してリーマン予想が成立することを証明した。また、Zagier らと共同で、階数  $n$  のモチーフ的なゼータ関数は付随する代数群  $SL(n)$  のモチーフ的なゼータ関数と一致することを証明した。翁は、計算機による膨大な計算に基づいて、Weng のゼータ関数の零点の分布がリーマンのゼータ関数と同様に一般ガウス分布を示すという重要な予想を提出した。
- (5) 岩崎はパンルヴェ第 VI 方程式の不変部分集合、周期解、代数関数解を決定した。モノドロミー写像で不変な既約コンパクト部分集合は、孤立周期解か、超幾何関数解のなすリッカチ曲線に限ること、周期解はリッカチ解に限ることを示した。一方、孤立周期解は必ず無限個あり、その個数は周期と共に指数的に増大することを示した。また、パンルヴェ第 VI 方程式の場合、大部分の解のモノドロミーのエントロピーは正であることを示した。一般に、微分方程式の解の複雑さは、モノドロミー写像の力学系のエントロピーによって測られ、正ならばより複雑となる。
- (6) 第 II 型から第 VI 型までのパンルヴェ方程式の相空間ハミルトン構造は方程式を一意的に特徴づける (高野 1995 頃)。岩崎-岡田脩は、未解決の第 I 方程式に対してこの問題を解決、パンルヴェ第 I 方程式を軌道体ハミルトン構造によって特徴づけた。岩崎はまた Gauss の超幾何関数がいつガンマ関数による乗積公式を持つかという研究を開始し、内在する二つの対称性 (相対性と相互性) により、乗積公式を持つための必要条件、十分条件を与えた。
- (7) 小野薫は 3 人の共同研究者とともに、Lagrange 部分多様体のフレア理論を構成し、コンパクトなトーリックケーラー多様体の運動量写像の逆像に対して適用し、symplectic 幾何的な応用やホモロジー的ミラー対称性に関わる結果を得た。例えば、複素射影平面の 2 点 blow-up に適当なケーラー形式を与え、ハミルトン同相写像によって自分自身と交わらないようにできない運動量写像のラグランジュ・トーラスファイバーが連続的に現れることなどを示した。また、bulk 変形付きの量子 cohomology 環と potential 関数の Jacobi 環の同型を証明した。
- (8) シャピロら 4 人 (SSKM) の双対分割定理は、ルート系の高さ分布とワイル群の指数とが双対であることを主張する有名な結果である。寺尾は 4 人の共同研究者

とともにこの双対分割定理を、任意のイデアル配置に拡張し、著名な予想を解決した。また、アローの不可能性定理の一般化 (2007) 以後、統計経済学者紙谷、竹村との連携で、社会選択論で使われるモデルを超平面配置の立場から考察、類似の数学的結果を得た (2012)。その後、社会選択論と超平面配置の関連を探る研究は、イタリアに伝播し活発に研究されている。

- (9) 連携研究者、斉藤政彦は非特異射影曲線上の放物接続のモジュライ空間の GIT 構成や構造を研究。接続のモジュライ空間から (一般) モノドロミー表現のモジュライ空間へのリーマン・ヒルベルト対応を研究し、モノドロミー保存変形を記述する微分方程式系が幾何学的パンルヴェ性を持つことを示した。放物接続や放物 Higgs 束のモジュライ空間の研究により、曲線上の直線束の点のヒルベルト概形とモジュライ空間が双有理同値であることを示した。
- (10) 連携研究者、大本亨は非特異代数多様体のヒルベルト・スキームと対称積のホモロジー特性類に関するゼータ関数の研究を行った。また、同変特異チャーン類理論を写像芽の分類理論および数え上げ幾何に応用し、種々の不変量の新しい計算方法を与えた。
- (11) 連携研究者、朝倉政典はレギュレーター (高次チャーン類写像)、代数多様体の周期について研究し、ハヴィエ・フレサンなどと共同で、曲線への射をもつ代数曲面のコホモロジーに関するグロス・ドリリーニユの周期予想を適当な条件の下で証明した。
- (12) このほか、本研究で雇用した研究員の中村健太郎 (現在、佐賀大) は、Bloch-加藤 exp 射の定義を簡略化する定理を証明し、より広いクラスの  $p$  進表現研究の基礎理論を構築した。また、局所 epsilon-予想を三角表現の場合に証明し、階数 2 の表現の局所・大域 epsilon-予想を、ほとんどの場合に解決した。

5. 主な発表論文等 (研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 67 件) (すべて査読あり)

- (1) I. Nakamura, Compactification by GIT stability of the moduli space of abelian varieties, Adv. Stud. Pure Math., 69, (2016) 207-286.
- (2) K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds. Asterisque 376, Soc. Math. France, 2016. (340 pages)
- (3) F. Loray, M.H. Saito, Lagrangian Fibrations in Duality on Moduli Spaces of Rank 2 Logarithmic Connections Over the

Projective Line, Int. Math. Res. Notices (IMRN), No.4, 2015, 995-1043.

(4) H. Katsurada and H. Kawamura, On Ikeda's conjecture on the period of the Duke-Imamoglu-Ikeda lift, Proc. London Math. Journal, 111 (2015), 445-483.

(5) K.Nakamura, Iwasawa theory of de Rham ( $\phi, \Gamma$ )-modules over the Robba rings, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 13 (2014), 65-118.

(6) M. Asakura, K. Sato, Syntomic cohomology and Beilinson's Tate conjecture for  $K2$ , J. Alg. Geom. 22 (2013), 481-547.

(7) K. Iwasaki and T. Uehara, Isolated periodic solutions to Painleve VI equation, RIMS Kokyuroku Bessatsu B37 (2013), 69-79.

(8) H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, Arrangements stable under the Coxeter groups : Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology, Scuola Normale in Pisa (2012), 327-354.

[学会発表](計 223 件)(すべて招待講演)

(1) 桂田英典, 保型形式の周期と合同およびそれに関連する話題, 日本数学会代数分科会特別講演, 2016/3/18, 筑波大学(茨城県つくば市)

(2) K. Ono, Some results on (super) heaviness for subsets in symplectic manifolds, 研究集会: Gromov-Witten theory, Gauge Theory and Dualities, 2016/1/12, Camberra (Australia)

(3) M.-H. Saito, The moduli spaces of parabolic connections and Higgs bundles over a smooth curve and differential equations of Painleve type, 研究集会 Differential and Difference Equations, 2015/10/22, Lille Univ., Lille(France)

(4) A. Ishii, On the special McKay correspondence, 研究集会: Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry, 2015/9/17, Moscow(Russia)

(5) H. Terao, On Parabolic Subarrangements and Restrictions of Weyl arrangements, 研究集会 :Differential and combinatorial aspects of singularities, 2015/8/7, Kaiserslautern (Germany)

(6) K.Nakamura, Local epsilon isomorphisms for rank two p-adic representations and a functional equation of Kato's Euler system, 研究集会 :Geometrie arithmetique, theorie des representations et applications, 2015/6/25, Luminy, (France)

(7) I.Nakamura, Extended Dynkin diagram

and Global McKay correspondence, Lakeside Lecture, 2015/6/9, Taipei (Taiwan)

(8) K.Ono, Idempotents in quantum cohomology and non-displaceable Lagrangian submanifolds, 2015/5/22 Symplectic Seminar, Paris(France)

(9) 中村郁, 佐武コンパクト化その誕生と発展, 2015/5/9, 研究集会''佐武先生の数学と思い出'', 東京大学(東京目黒区)

(10) H. Terao, On ideal subarrangements of Weyl arrangements, Workshop in Real and Complex Singularities, 2014/7/28, Sao Carlos (Brasil)

(11) K.Ono, Non-displaceable Lagrangian tori in  $S^2 \times S^2$ , 研究集会: Okounkov Bodies and Applications, 2014/5/25-31, Oberwolfach (Germany)

(12) I.Nakamura, Hesse cubics and GIT stability, Lakeside Lecture, 2014/2/14-19, Taipei (Taiwan)

(13) K. Ono, Lagrangian Floer theory: the case of toric manifolds, 研究集会: Calabi-Yau Geometry and Mirror Symmetry, 2014/1/6, Taipei (Taiwan)

(14) O.Okada, K.Iwasaki, On an orbifold Hamiltonian structure for the first Painleve equation, 第 16 回ソウル大学・北大ジョイントシンポジウム, 2013/12/13, ソウル(韓国)

(15) L. Weng, Global adelic cohomology groups for arithmetic varieties, Pan Asia Number Theory 2013, 2013/7/23, Hanoi (Vietnam)

(16) M.Asakura, Real regulator of  $K1$  of a fibration of curves, 研究集会: Recent Progress on Hodge theory, 2013/6, Vancouver (Canada)

(17) I.Nakamura, The complete moduli spaces of degenerate abelian varieties, 研究集会: the 6th MSJ-SI, Development of Moduli Theory, 2013/6/18, 京都大学(京都府京都市)

(18) L.Weng, General Uniformity of Zeta Functions, 研究集会: Global invariants and moduli spaces, 2013/5/25-5/30, KIAS, Seoul (Korea)

(19) I.Nakamura, Compactification of the moduli space of abelian varieties, Seminar in arith. and alg. Geom., 2013/5/21, Univ.Paris-Sud 11, Paris (France)

(20) L. Weng, Non-Abelian Zeta Functions, 研究集会: HIDA 60: p-adic Modular Forms and Arithmetic, 2012/6/23, UCLA, Los Angeles (USA)

[図書](計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~nakamura>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中村 郁 (NAKAMURA IKU)  
北海道大学・ - ・名誉教授  
研究者番号：50022687

### (2) 研究分担者

岩崎 克則 (IWASAKI KATSUNORI)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：00176538

小野 薫 (ONO KAORU)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号：20204232

寺尾 宏明 (TERAO HIROAKI)  
北海道大学・国際本部・特任教授  
研究者番号：90119058

翁 林 (WENG LIN)  
九州大学・数理学研究院・教授  
研究者番号：60304002

### (3) 連携研究者

朝倉 政典 (ASAKURA MASANORI)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：60322286

石井 亮 (ISHII AKIRA)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：10252420

大本 亨 (OOMOTO TORU)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：20254400

桂 利行 (KATSURA TOSHIYUKI)  
法政大学・経営システム工学科・教授  
研究者番号：40108444

桂田 英典 (KATSURADA HIDENORI)  
室蘭工業大学・大学院工学研究科・教授  
研究者番号：80133792

斉藤 政彦 (SAITO MASAHIKO)  
神戸大学・理学研究院・教授  
研究者番号：80183044

阿部 紀行 (ABE NORIYUKI)  
北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
研究者番号：00553629

田辺 顕一郎 (TANABE KENICHIRO)  
北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
研究者番号：10334038

中村 健太郎 (NAKAMURA KENTARO)  
佐賀大学・大学院工学系研究科・准教授  
研究者番号：90595993

原下 秀士 (HARASHITA SHUSHI)  
横浜国立大学・大学院環境情報研究院・准教授  
研究者番号：70396852

吉永 正彦 (YOSHINAGA MASAHIKO)  
北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
研究者番号：90467647