科学研究費助成事業(基盤研究(S))公表用資料
[研究進捗評価用]

平成２３年度採択分
平成２６年３月１２日現在

非線形偏微分方程式の凝縮現象と解の構造
Concentration Phenomena and Structure of Solution For Nonlinear Evolution Equations

堤　誉志雄（TSUTSUMI　YOSHIO）
京都大学・大学院理学研究科・教授

研究の概要
非線形発展方程式に対し解の性質を調べる際、最も重要なことの一つは、“凝縮現象”とよばれ広い意味での特異性を特徴付けることである。本研究課題では、この凝縮現象を函数解析的方法および調和解析的方法を用いて解析する。さらに、凝縮現象を解析する数値計算法の開発を目指し、理論と数値シミュレーションとの比較も行う。

研　究　分　野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学解析
キ　ー　ワ　ー　ド：函数方程式論，非線形波動・分散型方程式，解の正則性・特異性

１．研究開始当初の背景
非線形発展方程式においては，“凝縮現象”とよばれる広い意味での特異性が解の大域的性質を決定することが多い。広い意味での特異性というのは，通常用いられるような，解の滑らかではない部分という意味ではなく，解が持つと期待される性質を阻害する可能性がある解の性質のことを意味する．従って、凝縮現象を統一的に扱う手法・理論の確立が望まれる。

２．研究の目的
広い意味での特異性は解の何らかの量（たとえば，p 乗積分ノルムなど）が局所的に凝縮・集約することにより発生することが多い．本研究では，非線形波動・分散型方程式および反応拡散系方程式や非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を研究対象とし，解の凝縮現象によって代表される広い意味での特異性生成メカニズムを数学的に研究するとともに，それらの凝縮現象を数値シミュレーションする。

３．研究の方法
凝縮現象は様々な解析学的分野において現れる，きわめて興味深い現象であり，理論的解析と数値計算による解析の双方の研究が重要である．その観点から，理論的には近年発展の著しい非線形波動・分散型方程式研究を通して開発された，フーリエ制限法，I-method および最小爆発解の議論を用いるとともに，数値シミュレーションを行う。

４．これまでの成果
（非線形波動・分散型方程式）
まず、非線形シュレディンガー方程式や非線形クライン・ゴルドン方程式に対しては、不安定な基底状態の近傍から出発する解の大域的挙動について、ある条件の下で完全に分類した。基底状態よりエネルギー準位が低い解については、多数の先行研究があるが、基底状態の近くとは言え、エネルギー準位が高い場合の数学的研究はほとんどなかった。その点で、当該分野における大きなブレークスルーであると言える。また、周期境界条件の下で 2 次元 Zakaharov 方程式の爆発解の存在を証明した。2 次元ユークリッド空間における Zakaharov 方程式に対しては、Glangetas and Merle が 1994 年に証明したが、周期境界条件の場合は未解決であった。今回は周期境界条件における Zakaharov 方程式の非線形項評価に相当する、ほぼ最良の双線形評価を得ることにより爆発解の存在証明が可能となった。さらに、形状記憶合金の数理モデル方程式である等温 Falk モデルに対し、Gibbs 測度と Kuksin 流の不変測度を構成した。非線形波動・分散型方程式のような無限次元のシステムに対し不変測度を構成するのは、それ自身非常に興味深い問題である。

（流体方程式と数値計算）
張力重力波のストークスドリフトと呼ばれる現象を数学的に解析するとともに数値計算によって調べた。張力重力波とは、水面が

表面張力や重力によって振動するときに生じる波のことであり、古くから研究が行われてきた。渦なし粘性なしの非圧縮性流体の自由境界値問題に対し、線形化方程式を考えると、水面に乗っている粒子運動の軌跡は、近似的に楕円や円の閉曲線になる。しかし、波が小さくても2次の非線形性を無視することはできず、2 次非線形性の効果により粒子は水平方向に移動する。これを、ストークスドリフトという。このことは、張力がない重力波の場合には2006年にConstantinによって証明されたが、その証明方法は張力重力波の場合には適用できなかった。今回は、張力重力波の場合でも適用できる証明を与えるとともに、Euler座標系での数値計算を行った。また、3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に関係した、移流項と非局所性を持つモデル方程式を考え、特異性生成メカニズムを調べた。さらに、やはり非圧縮性 Navier-Stokes 方程式と関連した一般化Prudman-Johnson方程式の数値計算を行い、パターン形成や特異性生成メカニズムを数値的に調べた。

（Keller-Segel 方程式）
1970年にKeller と Segel が細胞性粘菌の集中現象を記述するモデルとした提唱した、いわゆる放物型－放物型 Keller-Segel 方程式に対し、解が爆発するための自然な十分条件を与えることは、長年の未解決問題であったが、今回これに決着をつける結果を得た。放物型－放物型の方程式を簡単化した、放物型－楕円型 Keller-Segel 方程式の爆発解については、多数の先行研究がある。しかし、放物型－放物型の場合、3 次元以上の領域に対してはWinklerが証明していたが、彼の証明方法は 2 次元には適用できなかった。今回、Trudinger-Moser 不等式とある種の単調性公式を組み合わせることにより、放物型－放物型 Keller-Segel 方程式の解が爆発するための十分条件を与えることに成功した。

（双線形写像の有界性）
2 次の非線形性は二つの函数の積で表されるので、双線形写像と見なすことができる。そのため、非線形偏微分方程式への応用を考えると、線形写像の有界性だけでなく双線形写像の有界性も重要である。今回、Morrey空間におけるアトム分解を考え、双線形写像の有界性定理へ応用した。Morrey空間は、非圧縮性Navier-Stokes方程式の解空間として用いられるだけでなく、2008 年の Merle and Raphael の論文では、質量優臨界非線形シュレディンガー方程式の解が爆発するときには、スケール不変ノルムも爆発することを示すために用いられており、非線形偏微分方程式研究に重要な函数空間である。そのため、将来非線形偏微分方程式への応用が期待される。

５．今後の計画
非線形発展方程式に対する凝縮現象をさらに深く解析するため、4 番で述べたこれまでの成果を進展させるとともに、新しい問題にも取り組む。具体的には、平成 25 年度までは、個別の方程式に対し、それぞれがほぼ独立に研究を行ってきたが、研究期間の後半ではそれらの背後にある共通の原理・法則を探る。また、数学理論としての解析だけでなく、理論と数値シミュレーションとの比較も行う予定である。

６．これまでの発表論文等（受賞等も含む）

論文発表

[1] Y. Tsutsumi and S. Yoshikawa, Invariant measures for the isothermal Falk model of shape memory alloys, Proceedings of the Mathematical Fluid Dynamics and Nonlinear Wave に掲載決定済み（査読有り）
[2] H. Okamoto, Blow-up problems in the strained vorticity dynamics and critical exponents, J. Math. Soc. Japan, 65 (2013), 379-403.（査読有り）（2014 年度JMSJ論文賞受賞）
[3] N. Masmoudi and K. Nakanishi, Multifrequency NLS scaling for a model equation of gravity-capillary waves, Comm. Pure Appl. Math., 66 (2013), 1202-1240.（査読有り）
[4] N. Kishimoto and M. Maeda, Construction of blow-up solutions for Zakharov system on $¥mathbb{T}^2$, Ann. Inst. H. Poincare, Analyse Non-lineaire, 30 (2013), 791-824.（査読有り）
[5] N. Mizoguchi, Global existence for the Cauchy problem of the parbolic-parabolic Keller-Segel system on the plane, Calc. Var. Partial Differential Equations, 48 (2013), 491-505.（査読有り）
[6] K. Nakanishi and W. Schlag, Global dynamics above the ground state for the nonlinear Klein-Gordon equation without a radial assumption, Arch. Ration. Mech. Anal., 203 (2012), 809-851.（査読有り）

口頭発表

(1) N. Mizoguchi, 非線形保物型方程式の爆発現象、日本数学会年会総合講演、学習院大学、2014年3月15日－18日（基調講演）

受賞

(1) 中西賢次、第 9 回（平成 24 年度）日本学術振興会賞受賞、受賞対象業績：エネルギー凝縮と非線形波動・分散型方程式の非線形散乱理論

ホームページ等
無し