

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 25 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23244002

研究課題名(和文) 数論における幾何・トポロジーの新展開とアルゴリズム

研究課題名(英文) New developments in number theoretic geometry, topology, and algorithm

研究代表者

松本 眞 (Matsumoto, Makoto)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：70231602

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 20,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、数論・代数・幾何など純粋数学の融合的な研究をおこない、合わせて、それらを社会的に実用する研究をおこなった。純粋数学分野では、楕円曲線と呼ばれる曲線の、普遍族から得られるモチーフの構成を行った。また、代数曲線の数論的基本群のl進線形表現が与えられたとき、その有理点から来る像が全体の像の中で「有限個の例外を除き大きい」ことを示した。社会的実用方向の研究として、高速な数値積分アルゴリズムを開発した。数値積分アルゴリズムは代数曲線の有理点を用いて構成された点集合に対して、変形を行い、研究代表者が導入した「WAFOM」という評価基準により選定された点集合を用いる。

研究成果の概要(英文)：We studied pure mathematics such as number theory, algebra, geometry, in an interdisciplinary manner. In addition, we studied there application in other branch of science and engineering. In pure mathematics side, we constructed a mixed elliptic motif obtained from universal family of elliptic curves. Also, given an l-adic linear representation of arithmetic fundamental group of an algebraic curve, we compared the image of the representation and the image of the Galois group of k-rational point of curves. As for applicational research, we developped a fast numerical integration algorithm based on quasi-Monte Carlo. The method depends on a point set (called Niederreiter-Xing point sets) whose basis is in the theory of rational points of algebraic curves). We introduced a new criteria for uniformity of point set named WAFOM, and our algorithm uses point sets obtained by scrambling Niederreiter-Xing point sets whose WAFOM value is small. Its effectiveness is empirically confirmed.

研究分野：数論幾何、トポロジー、アルゴリズム

キーワード：数論幾何 トポロジー アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

代数多様体やモジュライ空間の幾何やトポロジーと、数論幾何の関係に注目があつまった。圏論の数論への応用や、幾何的・数論的アルゴリズムの実用への期待があつた。

2. 研究の目的

目的は以下の3つである。

A. 幾何的トポロジーの手法：基本群やモジュライ空間の幾何を利用した数論幾何・モチーフ理論の展開、B. 圏論に基づく数論幾何の展開、C. 数論・代数学における幾何的アルゴリズムの開発による工学的応用

3. 研究の方法

本研究は、上記のように A. 数論における幾何学的・トポロジー的手法、B. 圏論の数論幾何学、C. アルゴリズムの側面、の三つの柱をもつ。A, B については東京大学・京都大学・広島大学などでセミナーを開き、研究を進めた。H23 年 7 月には米国ユタ大学で開かれる PCMI モジュライ空間の幾何国際会議を代表者は訪問し、連続講義をしつつ Hain 教授、C. Faber 教授らと研究討論をした。H23 年 7 月には広島大学で広島整数論集会(国内)を開催、H23 年 12 月にはモチーフに関する国際会議を東京大学で共催、H24 年 1 月には低次元トポロジーに関する国際会議を広島大学で共催しそれぞれに海外研究者を招聘した。H24 年度から H25 年度にもモチーフに関する同様の国際会議を共催し、人的交流により研究を進めた。C. については応募者が広島大学斎藤睦夫(前)助教と協力し、計算機実験を行い実用成果を上げた。実用化実験のための計算機利用も行った。

4. 研究成果

研究代表者は、数論・代数学のアルゴリズム的側面について、高速な数値積分アルゴリズムを開発した。数値積分アルゴリズムは Niederreiter-Xing による代数曲線の有理点を用いた  $(t, m, s)$  ネットに対し、スクランブルと呼ばれる変形を行い、研究代表者が導入した「WAFOM」という評価基準により選定された点集合を用いる。正規分布の累積度関数に関しては、既存の数値積分法よりも高速であることを実験的に確認している。また、純粋数学の側面では、普遍的楕円曲線からなるモチーフを R. Hain と構成した(論文投稿中)。連携研究者玉川は、Anna Cadoret 准教授との共同研究で、代数曲線  $X/k$  の数論的基本群の 1 進線形表現を一つ固定すると、 $X$  の  $k$  有理点  $x$  に対応するガロア群の像が有限個の素点を除いて表現の像の中の開部分群となり、その指数は上から表現のみによる定数でおさえられることを、表現の像が Lie perfect という条件のもとで示した。成果は Duke Math Journal に発表されている。斎藤は、代数的サイクルとモチーフ論に新展開を与えた。望月は、スキーム論の枠組みを超えた「宇宙際

タイヒミュラー理論」を構築しつつある。島田は、いくつかの  $K3$  曲面の自己同型群を求めた。鎌田は、モノドロミーをグラフィクス(チャート表示という)を用いて表す手法を開発し、低次元トポロジーでその応用を展開した。山内は、Van Geemen 氏と位数 5 の自己同型を持つ 3 次元 3 次超曲面に付随する中間ヤコビ多様体の分解構造を決定し、その応用として実乗法をもつヤコビ曲面の新構成法を与えた。平之内は、局所体上の曲線に対する類体論について考察した。寺杉は、Deligne-伊原予想の証明に持ちいられる Brown-Zagier の関係式がアソシエータ関係式から導かれることを示した。星は、次元が 4 以下の多重双曲的曲線に対する Grothendieck 予想を解決した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 25 件)

1. Kaji, Hajime; Terasoma, Tomohide Degree formula for Grassmann bundles. J. Pure Appl. Algebra 219 (2015), no. 12, 5426-5428. DOI://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.05.024 査読有

2. Hoang, Thanh Hoai; Shimada, Ichiro On Ballico-Hefez curves and associated supersingular surfaces. Kodai Math. J. 38 (2015), no. 1, 23-36. Doi://dx.doi.org/10.2996/kmj/1426684441 査読有

3. Matsumoto, Makoto; Saito, Mutsuo; Matoba, Kyle, A computable figure of merit for quasi-Monte Carlo point sets. Math. Comp. 83 (2014), no. 287, 1233-1250. DOI://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-2013-02774-3 査読有

4. Cadoret, Anna; Tamagawa, Akio Controlling the Galois images in one-dimensional families of  $\ell$ -adic representations. J. Algebra 412 (2014), 189-206. Doi://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.04.024 査読有

5. Mochizuki, Shinichi A panoramic overview of inter-universal Teichmüller theory. Algebraic number theory and related topics 2012, 301-345, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B51, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014. Doi 無 査読有

6. Chiarellotto, Bruno; Tsuzuki, Nobuo

Clemens-Schmid exact sequence in characteristic  $p$ . *Math. Ann.* 358 (2014), no. 3-4, 971-1004  
Doi://dx.doi.org/10.1007/s00208-013-0980-8 査読有

7.Hoshi, Yuichiro The Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of lower dimension. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 21 (2014), no. 2, 153-219.Doi 無 査読有

8.Saito, Shuji; Sato, Kanetomo Zero-cycles on varieties over  $p$ -adic fields and Brauer groups. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) 47 (2014), no. 3, 505-537.Doi 無 査読有

9.Kerz, Moritz; Saito, Shuji Lefschetz theorem for abelian fundamental group with modulus. *Algebra Number Theory* 8 (2014), no. 3, 689-701.  
Doi://dx.doi.org/10.2140/ant.2014.8.689 査読有

10.Katsura, Toshiyuki; Kondo, Shigeyuki; Shimada, Ichiro On the supersingular  $K3$  surface in characteristic 5 with Artin invariant 1. *Michigan Math. J.* 63 (2014), no. 4, 803-844.  
Doi://dx.doi.org/10.1307/mmj/1417799227 査読有

11.Kimura, Shunichi; Kuroda, Shigeru; Takahashi, Nobuyoshi The closed cone of a rational series is rational polyhedral. *J. Algebra* 405 (2014), 243-258.  
Doi://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.02.007 査読有

12.Lee, Donghi; Sakuma, Makoto Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements (III). *Geom. Dedicata* 171 (2014), 57-91.  
Doi://dx.doi.org/10.1007/s10711-013-9889-3 査読有

13.Lee, Donghi; Sakuma, Makoto Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements (II). *Geom. Dedicata* 171 (2014), 29-56  
Doi://dx.doi.org/10.1007/s10711-013-9888-4 査読有

14.Lee, Donghi; Sakuma, Makoto Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link

complements (I). *Geom. Dedicata* 171 (2014), 1-28.  
Doi://dx.doi.org/10.1007/s10711-013-9891-9 査読有

15.Matsumoto, Makoto; Yoshiki, Takehito Existence of higher order convergent quasi-Monte Carlo rules via Walsh figure of merit. *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2012*, 569-579, Springer Proc. Math. Stat., 65, Springer, Heidelberg, 2013.  
Doi:dx.doi.org/10.1007/978-3-642-41095-6\_29 査読有

16.Cadore, Anna; Tamagawa, Akio Note on torsion conjecture. *Geometric and differential Galois theories*, 57-68, Sémin. Congr., 27, Soc. Math. France, Paris, 2013  
DOIなし 査読有

17.Cadore, Anna; Tamagawa, Akio A uniform open image theorem for  $\ell$ -adic representations, II. *Duke Math. J.* 162 (2013), no. 12, 2301-2344  
Doi://dx.doi.org/10.1215/00127094-2323013 査読有

18.Haramoto, Hiroshi; Matsumoto, Makoto; Nishimura, Takuji; Otsuka, Yuki A non-empirical test on the second to the sixth least significant bits of pseudorandom number generators. *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2012*, 417-426, Springer Proc. Math. Stat., 65, Springer, Heidelberg, 2013  
Doi:dx.doi.org/10.1007/978-3-642-41095-6\_19 査読有

19.Dick, Josef; Matsumoto, Makoto On the fast computation of the weight enumerator polynomial and the  $t$  value of digital nets over finite abelian groups. *SIAM J. Discrete Math.* 27 (2013), no. 3, 1335-1359  
Doi://dx.doi.org/10.1137/120893677 査読有

20.Saito, Mutsuo; Matsumoto, Makoto Variants of Mersenne twister suitable for graphic processors. *ACM Trans. Math. Software* 39 (2013), no. 2, Art. 12, 20 pp  
Doi://dx.doi.org/10.1145/2427023.2427029 査読有

21.Chen, Su; Matsumoto, Makoto; Nishimura, Takuji; Owen, Art B. New inputs and methods for Markov chain quasi-Monte Carlo. *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2010*, 313-327, Springer Proc. Math. Stat., 23,

Springer, Heidelberg, 2012  
Doi://dx.doi.org/10.1145/2427023.242702  
9 査読有

22. Cadoret, Anna; Tamagawa, Akio A uniform open image theorem for  $\ell$ -adic representations, I. Duke Math. J. 161 (2012), no. 13, 2605-2634.  
Doi://dx.doi.org/10.1215/00127094-18129  
54 査読有

23. Caro, Daniel; Tsuzuki, Nobuo Overholonomicity of overconvergent F-isocrystals over smooth varieties. Ann. of Math. (2) 176 (2012), no. 2, 747-813.  
Doi://dx.doi.org/10.4007/annals.2012.176.2.2 査読有

24. Kimura, Kenichiro; Kimura, Shun-Ichi; Takahashi, Nobuyoshi Motivic zeta functions in additive monoidal categories. J. K-Theory 9 (2012), no. 3, 459-473.  
Doi://dx.doi.org/10.1017/is011011006jkt  
174 査読有

25. Furusho, Hidekazu Geometric interpretation of double shuffle relation for multiple L-values. Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry, 163-187, Adv. Stud. Pure Math., 63, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012. DOI なし 査読有

[学会発表](計96件)

1. 高橋 宣能, Quandles in algebraic and arithmetic geometry, The 10-th Anniversary Tokyo-Seoul Conference in Mathematics - Algebraic/Arithmetic/Complex Geometry, 東京大学大学院数理科学研究科, (東京都) 2015.12.5.

2. 平之内 俊郎, Class field theory of curves over local fields, East Asia Number Theory Conference, 2015年8月24日, 春川 (韓国)

3. Makoto Sakuma, Mapping class group action on the space of geodesic rays of a punctured hyperbolic surface, Invariants in low-dimensional geometry, 2015年8月10日-14日, Gazi Univ. アンカラ (トルコ)

4. Shuji Saito 2015年7月13日-31日 Motives with modulus, AMS algebraic geometry summer institute 2015, University of Utah, USA.

5. 山内 卓也 2015年6月22日 Artin 表現に付随する保型表現について 松江セミナー、島根大学 松江市

6. Makoto Matsumoto 2015/07/06-10 ``WAFOM with parameter for higher QMC: Revenge of the algebraic code, Part II'' 10th IMACS Seminar on Monte Carlo Methods, JKU, Linz, Austria.

7. H.Haramoto, A method to check soundness of statistical tests on randomness, 10th IMACS Seminar on Monte Carlo Methods, 2015年7月9日, Linz (Austria)

8. Ichiro Shimada K3 Surfaces and Lattice Theory 日本数学会 秋季総合分科会 企画特別講演 28 September, 2014 広島大学 東広島市

9. Ichiro Shimada On the supersingular K3 surface in characteristic 5 with Artin invariant 1 K3 surfaces and their moduli 07 May, 2014 Schiermonnikoog, Netherlands

10. Makoto Matsumoto 2014/04/07-11 ``Walsh Figure of Merit (WAFOM) for digital nets: An easy measure for higher order convergent QMC'' 11th International Conference on Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, KU Leuven, Leuven, Belgium

11. H.Haramoto, An approximation of the weight distribution of the n-th bits of pseudo-random number generators, 11th International Conference on Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing (MCQMC2014), 2014年4月8日, Leuven (Belgium)

12. 西村 拓士 Some deterministic sequences for Markov chain Monte Carlo Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2014, 2014/4/8 Leuven(Belgium)

13. 古庄 英和 2014/3/15-2014/3/18 アソシエータとその周辺 日本数学会特別招待講演 (学習院大学 東京都)

14. Ichiro Shimada

An algorithm to compute automorphism groups of K3 surfaces  
The Asian Mathematical Conference 2013 (AMC 2013)  
02 July, 2013  
Busan, Korea

15. 望月 新一,

「宇宙際タイヒミュラー理論への誘い(いざな)い《拡大版》」,  
2013年06月13日, 東京大学数理科学研究科講演会、東京大学数理科学研究科(東京都目黒区)

16. Yuichiro Hoshi

Grothendieck-Teichmuller Groups in the Combinatorial Anabelian Geometry,  
Grothendieck-Teichmuller theory and Multiple Zeta Values  
2013年4月12日  
Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences in University of Cambridge (Cambridge (UK))

17. 作間 誠

Simple loops on bridge spheres and Heegaard surfaces  
日本数学会 2013 年度年会・特別講演,  
2013年3月20日, 京都大学(京都府京都市).

18. 望月 新一,

宇宙際タイヒミュラー理論への誘い(いざな)い,  
代数的整数論とその周辺,  
2012年12月5日,  
京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

19. 芳木 武仁, 松本 眞 2012/12/20-22 準モンテカルロ積分誤差を小さくする点集合の存在

2012 年度応用数学合同研究集会 龍谷大学 瀬田キャンパス 滋賀県大津市

20. S. Kamada, Presentations of racks, quandles and symmetric quandles,  
研究集会「TAPU Summer School on Quandle Theory, 特別招待講演,  
Pusan National University, 釜山, 韓国,  
2012年7月23日--7月27日

21. 寺嶋 友秀, Brown-Zagier relation for associators, Grothendieck-Teichmuller group, Deformation and Operad,  
Cambridge, ケンブリッジ、イギリス、2012年3月14日

22. Makoto Matumoto 2012/02/13

``A deviation of CURAND: standard

pseudorandom

number generator in CUDA for GPGPU''  
10th International Conference on Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing,  
University of New South Wales,  
Sidney, Austraria (with M. Saito)

23. Makoto Sakuma

Essential simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements,  
Hyperbolicity in geometry, topology and dynamics,  
Univ. Warwick, 英国, 2011年7月25日-27日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 眞 (MATSUMOTO MAKOTO)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 70231602

(3) 連携研究者

玉川 安騎男 (TAMAGAWA AKIO)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号: 00243105

望月 新一 (Mochizuki Shinichi)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号: 10243106

星 裕一郎 (Hoshi, Yuichiro)  
京都大学・数理解析研究所・講師

研究者番号：50456761

都築 暢夫 (Tsuzuki, Nobuo)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：10253048

寺杣 友秀 (Terasoma Tomohide)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：50192654

斎藤 秀司 (Saito Shuji)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：50153804

辻 雄 (Tsuji, Takeshi)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：40252530

志甫 淳 (Shiho, Atsushi)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：30292204

森田 茂之 (Morita, Shigeyuki)  
東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授  
研究者番号：70011674

島田 伊知朗 (Shimada, Ichiro)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：10235616

木村 俊一 (Kimura, Shun-ichi)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：10284150

鎌田 聖一 (Kamada, Seiichi)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：60254380

作間 誠 (Sakuma, Makoto)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：30178602

石井 亮 (Ishii, Akira)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：10252420

高橋 宣能 (Takahashi, Nobuyoshi)  
広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：60301298

平之内 俊郎 (Hiranouchi, Toshiro)  
広島大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号：30532551

原本 博史 (Haramoto, Hiroshi)

愛媛大学・教育学部・講師  
研究者番号：40511324

金子 昌信 (Kaneko, Masanobu)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：70202017

田口 雄一郎 (Taguchi, Yuichiro)  
東京工業大学・理工学研究科・教授  
研究者番号：90231399

古庄 英和 (Furusho, Hidekazu)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授  
研究者番号：60377976

西村 拓士 (Nishimura, Takuji)  
山形大学・理学部・准教授  
研究者番号：90333947

萩田 真理子 (Hagita, Mariko)  
お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・准教授  
研究者番号：70338218

山内 卓也 (Yamauchi, Takuya)  
鹿児島大学・教育学部・准教授  
研究者番号：90432707

朝倉 政典 (Asakura, Masanori)  
北海道大学 / 大学院・理学研究院 / 准教授  
研究者番号：60322286

水澤 靖 (Mizusawa, Yasushi)  
名古屋工業大学・大学院工学研究科・准教授  
研究者番号：60453817