

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 27 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23244008

研究課題名(和文) 写像の特異点論の新展開

研究課題名(英文) New developments of singularity theory of mappings

研究代表者

佐伯 修 (SAEKI, OSAMU)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：30201510

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 37,100,000円

研究成果の概要(和文)：現代数学の潮流の中で、特異点論の新たな展開の方向性をさぐることが目的であった。まず6次元から3次元への多項式写像芽で非自明なものがあるかという40年来のMilnorの問題を、配置空間のトポロジーを使って肯定的に解決した。また、特殊な特異写像のはめ込み・埋め込みによる特異点消去可能条件を完全に決定した。さらに境界付き3次元多様体上の写像の特異ファイバーを分類し、境界付き曲面上のモース関数の同境群をはじめて定式化した上でそれが位数2の巡回群になることを示した。また、こうした理論をデータ可視化に応用し、ユーザインターフェースを試作した。このように特異点論の新展開の方向性を十分に示すことができた。

研究成果の概要(英文)：The main purpose of this project was to indicate new directions of the singularity theory of differentiable mappings in our era of modern Mathematics. First, we completely solved affirmatively the long-standing classical problem of Milnor about the existence of nontrivial polynomial map germs of dimension 6 to 3, by utilizing the topology of configuration spaces. We also completely determined the conditions for a special generic map to be desingularized from a viewpoint of immersions and embeddings. We classified singular fibers of stable maps on 3-manifolds with boundary, established the notion of cobordism group of Morse functions on surfaces with boundary, and showed that it is a cyclic group of order two. Finally, we applied such a theory of singular fibers to the data visualization and developed a new user interface. Summarizing, we could broadly show the new directions for the development of the singularity theory of differentiable mappings.

研究分野：位相幾何学

キーワード：特異点 多項式写像芽 特異点消去 埋め込み はめ込み 特異ファイバー 同境群 データ可視化

1. 研究開始当初の背景

可微分多様体間の可微分写像とその特異点の研究(いわゆる写像の特異点論)は、20世紀中頃の Whitney や Thom に始まりその後大きな発展を遂げた。特異点論はその汎用性を大きな武器とし、微分トポロジーにとどまらず、数学内外の種々の分野においてその重要性を増しており、さらなる発展への期待は大きい。特にここ数年、Vassiliev 型不変量、写像の Pontrjagin-Thom 構成理論、特異多様体や多様体束の特性類理論、曲面特異点と 3次元多様体の Heegaard-Floer ホモロジーの関係など、多くの画期的な研究が生み出され、その様相は激化している。

このような激動期中、特異点論はその大きな転回期を迎えつつあると言える状況にある。写像の特異点論が次なる展開を模索する必要があるのは、たとえば以下の理由による。

- ・写像の局所的性質(ある点のまわりでの性質)が多く研究されてきているが、多様体の本質的構造に関わる大域的性質(写像全体としての性質)の研究はあまりなされてきていない。

- ・多様体に自然に入る(あるいは既に入っている)幾何構造を反映させた形での写像の特異点論は、特別な場合を除いて定式化されていない。

- ・Vassiliev 型不変量の考え方には汎用性があり、種々の場面に適用できるはずであるが、実際には特異点を扱う際の技術的困難があって研究はあまり進展していない。

- ・可微分構造が特異点に本質的影響を与える単発的現象は発見されているが、それらの統一的説明はいまだにない。特になぜゲージ理論を経由する必要があるのか、特異点論的には不明である。

- ・曲面特異点のリンクとして現れる 3次元多様体の不変量と、特異点の解析的不変量の間に関連性が見られることが証明されているが、そうした現象に対する内包的説明はいまだにない。

2. 研究の目的

そこで本研究では、写像の特異点論を、大域的観点、幾何構造付きでの観点等の新たな観点から見直し、数学の現代的潮流の中での特異点論の新たな展開・発展の様々な方向性をさぐる大きな目的である。特に、多様体の可微分構造・幾何構造と特異点の関係、同境界理論に基づいた多様体の有限型不変量・量子不変量の特異点論的定式化、特異 Lefschetz 束と特異シンプレクティック構造の変形理論、複素特異点の結び目理論、特異多様体の特性類、特異点消去のホモトピー論的高次障害類等を中心に、種々の高度に重要な未解決問題を、これまでにない新しい統一的観点から、より大きな枠組みの中で解決してゆく。さらに、そうした結果を応用して、微分トポロジーの種々の重要な問題を解決

する。

3. 研究の方法

佐伯、佐久間等の研究により、定値折り目特異点のみを持つ写像の存在は、多様体の可微分構造に大きく依存することがわかっている。これは、特別な特異ファイバーのみを持つ写像の存在は多様体の可微分構造に依存する、と言い換えることもできる。そこで本研究では特異ファイバーに着目し、多様体の大域構造との関係について調べてゆく。そのためには種々の状況で特異ファイバーの分類が必要不可欠であり、特異点論に詳しい佐久間、大本、石川剛郎、山本卓宏の協力を得て実行してゆく。

多様体の同境界理論に基づいた有限型不変量、量子不変量の定式化については、まず Pontrjagin-Thom 構成の理論を思い出そう。Thom 空間 MO は、多様体の法束の分類空間 BO 上の普遍ベクトル束から構成され、零切断として BO を含む。このときどんな閉多様体も、十分次元の高い球面からの写像 $f: S^N$

MO で BO に横断的なものにより $f^{-1}(BO)$ として得られ、しかもこのような写像 f はある意味で一意的である。したがって、球面から空間対 (MO, BO) への写像全体のなす空間に対して有限型不変量が定義できれば、閉多様体に対しても定義できたことになる。この定式化を行うには、空間対への写像の特異点の分類、及びその変形の分類が必要不可欠である。これについては有限型不変量に詳しい大本の協力を得て研究を進める。

特異 Lefschetz 束構造の変形理論については、Lekili と Williams により、特異 Lefschetz 束の変形操作がいくつか考え出され、それらでほぼ十分であることが示されているが、写像の大域的分岐の議論がなされておらず、実際は不十分である。そこで本研究ではこれを完全なものに補完し、さらに特異シンプレクティック構造の変形までも明らかにして、4次元多様体の新たな不変量の構築を目指す。この方面の研究は、4次元多様体論に詳しい鎌田、佐久間と、シンプレクティック構造に詳しい石川昌治、石川剛郎の協力を得て進める。なお、こうした研究には豊富な具体例も必要であり、写像の構成論に詳しい小林の協力も得て研究を進める。

複素超曲面特異点の位相型については、まず平面曲線の場合の A'Campo による divide の理論を高次元化する。そのままではうまくいかない可能性もあるが、その場合は複素解析構造をうまく使い、適切な Morse 化を探してゆく。これについては、divide に詳しい石川昌治と、3次元特異点での divide を試みている片長の協力を得る。

特異多様体の特性類については、複素解析的不変量である混合 Hodge 構造を用いて monodromy 行列の情報が得られることが知られている。これをより一般の状況で精密化し、さらに特異点のモチビク不変量を融合

して特性類の新たな定式化を目指す。これについては特性類理論に詳しい與倉，混合 Hodge 構造とミラー対称性に詳しい竹内，モチビク不変量に詳しい福井の協力を得て研究を行う。

特異点・特異ファイバーの消去のためのホモトピー論的障害の研究については，まず Gromov 等によるホモトピー原理により，特異点の消去問題はある束に対する切断の存在問題と同等となることが知られている。ただし特異ファイバーの消去問題が同じ原理に従うかどうかは知られていない。そこで本研究では分類空間的なものを用い，ある種の束で切断の存在が特異ファイバーの消去と同等となるものを構成する。さらにそのホモトピー論的構造を具体的な状況で調べ，特異ファイバー消去のための高次障害を決定する。これに関してはホモトピー論に詳しい岩瀬，佐久間の協力を得て研究を進める。

なお平成 23 年度をはじめ，日仏の若い特異点論研究者を中心に集め，「これからの特異点論研究の指針」について討論し，今後の世界的な leading research group の形成を目指すことを主目的とする日仏特異点研究集会を開催する。これは今後の特異点論の展開を見据えるために必要不可欠である。

4. 研究成果

まず可微分写像の有限型不変量の定式化をするため，ジェネリックな可微分写像に対する Vassiliev 型不変量について再定式化を試みた。また，特異 Lefschetz 束構造の研究を進め，ホモロジー的条件さえ満たせば，どのような 1 次元部分多様体も特異点集合として実現可能であることを示した。これは既存の特異点理論における特異点集合改変のための手法を応用することにより示された。また Lefschetz 束とカンドルの間に密接な関係があることも明らかにした。さらに，複素超曲面特異点に付随した結び目の同境について調べ，Brieskorn 型多項式で定義される場合，その指数が多くの場合に同境不変となることを初めて示した。これは特異点の同変指数が結び目の同境不変量であることを巧みに利用することによって示した。また，特異多様体の特性類の研究を進め，特に Chern-Schwartz-MacPherson class について詳しく調べた。モチビク Hirzebruch class についても調べ，さらに proalgebraic varieties の特性類と，モチビク測度の関係についても研究した。また，こうした特性類を Thom 多項式との関連の観点からも研究した。なお日仏の若い特異点論研究者を中心に集め，これからの特異点論研究の指針について討論し，今後の世界的な leading research group の形成を目指すことを主目的とする日仏特異点研究集会を九州で開催し，大きな成功を収めた。

さらに，特異シンプレクティック構造と特異 Lefschetz 束構造の変形理論の研究を進め，

4 次元多様体から閉曲面へのどんな写像も特異 Lefschetz 束であって，折り目特異点像が埋め込まれているものにホモトピーで変形できることを構成的に示すことに成功した。さらに，一般的な可微分写像の Stein 分解が三角形分割可能であることを示し，応用としていくつかの Euler 標数公式を得た。またその応用として，非特異ファイバーの各連結成分の同境類と Stein 分解の最高次元のホモロジー群との間に深い関係があることを示し，特に Stein 分解の最高次元ホモロジー群が消えれば，非特異ファイバーの各連結成分はすべて零同境となることを示した。また特異写像の特異点消去を，はめ込み・埋め込みリフトの観点からも研究し，スペシャル・ジェネリック写像についてそうしたリフトが存在するための条件について詳しく調べ，値域の次元が低い場合に，余次元 1 のはめ込みリフトや埋め込みリフトが存在するための条件を完全に決定することができた。これについては，球面のはめ込みのなす空間のトポロジーが重要な役割を果たすことが明らかとなったが，一方で，それに関連して現れる Smale-Hirsch 写像と言われる準同型写像の性質を明らかにすることで証明に成功した。

境界付き 3 次元多様体から平面への安定写像の特異ファイバーについて山本卓宏氏と研究を行い，その分類をもとに，特異ファイバーの普遍複体のコホモロジー群を決定し，境界付き曲面上のある種のモース関数のなす同境群が非自明であることをはじめて証明することに成功した。さらに Reeb graph のなす同境群を用いることで，それが位数 2 の巡回群と同型であることを証明することにも成功した。また，こうした特異ファイバー理論を多変量データ解析とその可視化に応用し，そうしたデータの微分位相幾何的な特徴抽出の際の特異ファイバーの同定に使えることを示し，コンピュータサイエンスの専門家と共同研究を行い，はじめてユーザーフェースを試作するなど，その成果の社会への還元を目指した。また，実多項式写像芽の研究をブラジルの特異点論研究者と共同で行い，6 次元から 3 次元への多項式写像芽で非自明なものがあるか，という 40 年来の Milnor の古典的問題を肯定的に解決したほか，Milnor 束が球面のブーケとホモトピー同値であってなおかつ可縮でない具体例を構成することにもはじめて成功した。また平面間の余階数 2 の特異写像芽の分岐図式をある程度決定し，その結果を特異点の幾何学に応用した。

また，3 次元多様体から平面への安定写像の Reeb space を用いたデータ可視化への応用もコンピュータサイエンスの専門家と共同で研究し，写像を離散サンプル点での値から近似したものをを用いて得られる Reeb 空間に関して，離散化の度合いをどんどん細かくしていくと，実際の Reeb 空間に inverse limit の意味で収束することを初めて証明し

た．さらに，実および複素解析的写像の構造安定性に関する長らく未解決だった問題を厳密に扱い，ほぼ解決することに成功した．

以上のように，新しい観点から，そして同時に幅広い観点から，写像の特異点論の新たな方向性を示すことができた．中には研究開始当初には予測できなかった概念の確立なども含まれている．またそうした研究により，これまで未解決であった，微分トポロジーにおけるいくつかの重要な問題も解決することができた．

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 50 件)

A.Chattopadhyay, H.Carr, D.Duke, Z.Geng and O.Saeki, Multivariate topology simplification, to appear in *Comp. Geom.: Theory and Applications*, 査読有 .

O.Saeki, Theory of singular fibers and Reeb spaces for visualization, to appear in *Proc. Topology-Based Methods in Visualization 2015*, 査読有 .

O.Saeki and T.Yamamoto, Cobordism group of Morse functions on surfaces with boundary, to appear in *Proc. XIII International Workshop on Real and Complex Singularities, São Carlos, 2014*, 査読有 .

O.Saeki and T.Yamamoto, Singular fibers of stable maps of 3-manifolds with boundary into surfaces and their applications, to appear in *Algebr. Geom. Topol.*, 査読有 .

O.Saeki, Topology of manifolds and global theory of singularities, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, 査読有 .

D.Sakurai, O.Saeki, H.Carr, Hsiang-Yun Wu, T.Yamamoto, D.Duke and S.Takahashi, Interactive visualization for singular fibers of functions $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, *IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics*, vol.22, no.1, pp.945–954, Jan. 2016. doi:10.1109/TVCG.2015.2467433, 査読有 .

R.Araújo dos Santos, M.A.B.Hohlenwerger, O.Saeki and T.O.Souza, New examples of Neuwirth-Stallings pairs and non-trivial real Milnor fibrations, *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)*, 66 (2016), 83–104, 査読有 .

http://aif.cedram.org/aif-bin/fitem?id=AIF_2016__66_1_83_0

O.Saeki and S.Takahashi, Visual data mining based on differential topology: a survey, *Pacific Journal of Mathematics for Industry* 6 (2014), Article 4. doi: 10.1186/s40736-014-0004-y

O.Saeki, S.Takahashi, D.Sakurai, Hsiang-Yun Wu, K.Kikuchi, H.Carr, D.Duke and T.Yamamoto, Visualizing multivariate data using singularity theory, *The Impact of Applications on Mathematics, Proceedings of Forum "Math-for-Industry" 2013*, pp.51–65, Springer, 2014. doi:10.1007/978-4-431-54907-9

J.T.Hiratuka and O.Saeki, Connected components of regular fibers of differentiable maps, in "Topics on Real and Complex Singularities", *Proceedings of the 4th Japanese-Australian Workshop (JARCS4), Kobe 2011*, World Scientific, 2014, pp.61–73. doi: 10.1142/9789814596046_0005

O.Saeki and M.Takase, Desingularizing special generic maps, *Journal of Gökova Geometry Topology* 7 (2013), 1–24. <http://gokovagt.org/journal/2013/saekta.html>

J.T.Hiratuka and O.Saeki, Triangulating Stein factorizations of generic maps and Euler characteristic formulas, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu B38* (2013), 61–89. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B38/B38.html>

V.Blanlœil and O.Saeki, Cobordism of exact links, *Algebraic and Geometric Topology* 12 (2012), 1443–1455. doi: 10.2140/agt.2012.12.1443

L.A.Lucas and O.Saeki, Fox property for codimension one embeddings of product of three spheres into spheres, *Algebraic and Geometric Topology* 11 (2011), 3043–3064. doi: 10.2140/agt.2011.11.3043

V.Blanlœil and O.Saeki, Cobordism of algebraic knots defined by Brieskorn polynomials, *Tokyo J. Math.* 34 (2011),

[学会発表](計142件)

佐伯修, 安定写像と多様体のトポロジー, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学(京都府・京都市), 2015年9月14日.

O.Saeki, Singularity theory and data visualization, Geometric Singularity Theory, Polish-Japanese Singularity Theory Working Days, Banach Center, Warsaw (Poland), September 8, 2015.

O.Saeki, Cobordism group of Morse functions on surfaces with boundary, Brazil-Mexico 2nd Meeting on Singularities - 2015, Federal University of Bahia, Salvador (Brazil), July 13, 2015.

O.Saeki, Topology of singular fibers for visualization, Topology-Based Methods in Visualization 2015, Kurhaus Trifels, Annweiler (Germany), May 20, 2015.

O.Saeki, New examples of non-trivial real Milnor fibrations, Workshop on Singularities, Geometry, Topology and Related Topics, North-East Normal University, Changchung (China), September 2, 2014.

O.Saeki, Connected components of regular fibers of differentiable maps, 19th Brazilian Topology Meeting, São Jose do Rio Preto (Brazil), August 7, 2014.

O.Saeki, Singular fibers and visualization of multivariate data, 13th International Workshop on Real and Complex Singularities, ICMC, University of São Paulo, São Carlos (Brazil), August 1, 2014.

O.Saeki, Singular fibers of differentiable maps and low dimensional topology I, II, Visiting Lecture at Center for Advanced Studies, Warsaw University of Technology, Warsaw (Poland), March 18 & 25, 2014.

O.Saeki, Visualizing multivariate data using singularity theory, Forum "Math-for-Industry" 2013 -The Impact of Applications on Mathematics-, Nishijin Plaza, Kyushu University

(福岡県・福岡市), November 4, 2013.

O.Saeki, Desingularizing special generic maps, The 1st Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities (and The 7th Franco-Japanese Symposium on Singularities), Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice Sophia Antipolis, Nice (France), September 20, 2013.

O.Saeki, Broken Lefschetz fibrations and their moves, Special Session "Singularities in Geometry and Topology", The Second Pacific Rim Mathematical Association Congress (PRIMA2013), Shanghai (China), June 27, 2013.

O.Saeki, Broken Lefschetz fibrations and their moves, Geometry and topology of smooth 4-manifolds, Max Planck Institute, Bonn (Germany), June 6, 2013.

O.Saeki, Topology of definite fold singularities, The 4th Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities, Kobe Satellite of Hyogo University of Teacher Education(兵庫県・神戸市), November 24, 2011.

O.Saeki, Cobordism of knots defined by Brieskorn polynomials (joint work with Vincent Blanloeil), The 19th TAPU Seminar on Knots and Related Topics, Seacloud Hotel, Haeundae, Busan (Korea), September 16, 2011.

[図書](計4件)

Singularities in Geometry and Topology 2011, Edited by V.Blanloeil and O.Saeki, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol.66, Kinokuniya, Tokyo, 282 pages, May 2015.

[その他]

ホームページ等

<http://imi.kyushu-u.ac.jp/~saeki/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐伯修 (SAEKI, Osamu)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号: 30201510

(2) 研究分担者

大本 亨 (OHMOTO, Toru)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：20264400

與倉 昭治 (YOKURA, Shoji)
鹿児島大学・学術研究院理工学域理学系・
教授

研究者番号：60182680

岩瀬 則夫 (IWASE, Norio)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：60213287

鎌田 聖一 (KAMADA, Seiichi)
大阪市立大学・理学研究科・教授
研究者番号：60254380

佐久間一浩 (SAKUMA, Kazuhiro)
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号：80270362
(平成27年度より連携研究者)

(3) 連携研究者

石川 昌治 (ISHIKAWA, Masaharu)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10361784

福井 敏純 (FUKUI, Toshizumi)
埼玉大学・理工学研究科・教授
研究者番号：90218892

石川 剛郎 (ISHIKAWA, Goo)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：50176161

山本 稔 (YAMAMOTO, Minoru)
弘前大学・教育学部・准教授
研究者番号：40435475

高瀬 将道 (TAKASE, Masamichi)
成蹊大学・理工学部・准教授
研究者番号：30447718

足利 正 (ASHIKAGA, Tadashi)
東北学院大学・工学部・教授
研究者番号：90125203

片長 敦子 (KATANAGA, Atsuko)
信州大学・学術研究院・准教授
研究者番号：20373128

小林 真人 (KOBAYASHI, Mahito)
秋田大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：10261645

山本 卓宏 (YAMAMOTO, Takahiro)

九州産業大学・工学部・准教授
研究者番号：60435972

竹内 潔 (TAKEUCHI, Kiyoshi)
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号：70281160

高田 敏恵 (TAKATA, Toshie)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：40253398