

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 12 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23244015

研究課題名(和文)粘性解理論の深化と応用

研究課題名(英文)Deepening of the theory of viscosity solutions and its applications

研究代表者

石井 仁司 (ISHII, Hitoshi)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：70102887

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 22,400,000円

研究成果の概要(和文)：ハミルトン・ヤコビ方程式と粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間漸近挙動、割引消去問題等の偏微分方程式の漸近問題を扱い、粘性解の漸近挙動と一般理論に関する重要な新知見の獲得等の多くの成果を挙げた。また、特異拡散方程式や積分微分方程式について解の存在、一意性等の基礎理論を整備した。ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の解を解析し、最小化大偏差確率の時間大域的評価、非完備な市場モデルにおける最適消費・投資問題に対する強検証定理の証明、確率最適輸送問題への研究法の開発等で成果を挙げた。

研究成果の概要(英文)：We investigated the asymptotic problems of partial differential equations such as the long-time asymptotic behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations and viscous Hamilton-Jacobi equation, the vanishing discount problem, and obtained many important new pieces of knowledge regarding these asymptotic problems as well as the theory of viscosity solutions. We developed the basic theory of the existence and uniqueness of solutions for singular diffusion equations and for integral-differential equations. Based on the analysis of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, we established certain estimates on the large-time asymptotic behavior of the minimizing large deviation probabilities, the verification theorem for optimal consumption-investment in a non-complete market model, a new approach to the stochastic optimal transportation problem.

研究分野：数学

キーワード：関数方程式 粘性解 最適制御 曲面の発展方程式 完全非線形偏微分方程式 弱KAM理論

1. 研究開始当初の背景

粘性解の概念はCrandall-Lions (1981年)により導入された。偏微分方程式の研究のための道具として粘性解理論が整備され、種々の問題への応用に動機付けられて発展してきた。例えば、曲率流への等高面アプローチ、確率論における大偏差原理、均質化理論等へと応用され、 $L_p$ 粘性解などの理論面でも進展してきた。弱KAM理論(Fathi, 1997年)の導入、Harvey-Lawson(2009年)によるディリクレ問題の可解性の研究結果、Nadirashvili-Vladut (2007年)の一樣楕円型方程式の解の正則性に関する否定的な結果等の進展はさらに深化・発展させる可能性を強く示唆している。

2. 研究の目的

1階非線形偏微分方程式、2階非線形楕円型及び放物型偏微分方程式に対する粘性解理論とその応用の研究を目的とする。微分方程式の弱解である粘性解理論とその応用の重要性はこれまでの研究の成果により検証されているが、新たな粘性解理論の展開の芽生えもありこの理論をより精緻なものへと発展させる可能性がある。粘性解理論の深化と拡充を目指し、最適制御・微分ゲーム、曲面の曲率流、均質化理論のような漸近解析分野への粘性解理論の広範な応用を目指す。

3. 研究の方法

(1)粘性解理論の深化・拡充のために、細目課題を設定し、これらの各課題の研究と、その成果の総合により、深化した粘性解理論を構築する。

(2)細目課題について述べる。境界値問題：境界値問題に対する粘性解の存在と一意性を研究する。ディリクレ問題については、粘性解理論における古典的方法を発展させ、連続な粘性解の存在に関する理論の完成を目指す。ノイマン問題に関しては、比較定理に対する領域の境界に対する滑らかさの仮定をどこまで弱められるか等の基本的な疑問点を究明し、比較定理の精密化を図る。積分微分方程式に対する粘性解は重要であり、これに対する適切な境界値問題の設定を研究する。漸近問題への応用：偏微分方程式に関する種々の漸近問題、確率論における大偏差原理、種々の均質化問題などを対象に理論展開を図る。一つの方策として、弱KAM理論(W. E. A. Fathi)の深化・拡充とその応用を考える。弱KAM理論はハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の構造の研究において重要な役割を果し、漸近問題への応用において重要である。粘性解の正則性：Trudinger (1988年)、Caffarelli (1989年)による粘性解の正則性の研究を、Nadirashvili-Vladut (2007年)による否定的な結果を踏まえて、完全非線形方程式に対して推進する。

最適化問題への応用：最適制御理論の動的計画法アプローチへの粘性解の応用はP.-L. Lions(1982年)に始まる。最適制御と微分ゲームへの応用の研究により粘性解理

論の新展開を図る。数理ファイナンスへの応用も進める。幾何学的非線形問題への応用：図形の運動や性質に関連する幾何学的な問題を記述する完全非線形偏微分方程式に対して粘性解理論の応用を図り、その成果を幾何学の問題、科学・工学における界面の問題に応用する。

4. 研究成果

以下の(1)~(13)のような成果を挙げた。

(1)ハミルトン流を移流項とする退化楕円型方程式に対する特異摂動問題について、解の極限問題への一樣収束を示した。これにより、M. Freidlin, A. Wentzell 両氏(1994年)などによる確率論的手法を用いた研究に全く依存しない、この収束問題への偏微分方程式論に基づく方法を確立した。

(2)移流項を持つ放物型方程式に対する準安定性の出現に関する研究を進め、線形方程式の場合、半線形方程式の場合、準線形方程式の場合に対して完成させた。M. Freidlin, L. Korolovの両氏によって確率解析の手法で得られた、準安定性に関する結果(2012年)に対する粘性解の方法を含む偏微分方程式の手法による別証明を与えたものである。半線形方程式に対する結果は新しいものである。

(3)完全非線形2階楕円型方程式に対する固有値問題の研究を推進し、1次元区間あるいは一般次元の球を領域とする場合にディリクレ、ノイマン、ロバン境界条件の下での固有値問題を考察し、任意回数振動する固有関数の存在と、正規化の下での固有関数の一意性、このような固有値と固有関数の特徴づけなどを詳細に調べた。

(4)ハミルトン・ヤコビ方程式に対する解の長時間漸近挙動の研究を行った。非線形ノイマン境界条件の場合と動的ノイマン境界条件の場合に、弱KAMの方法と解の時間変数に関するある種の単調性を見出す方法の二つの異なる方法で解の長時間漸近挙動の決定を行った。この後者の単調性の方法はG. Barles, P. E. Souganidis両氏によって導入されたもの(2000年)であるが、この方法を改良した新しい方法を考案し、この方法で周期境界条件の場合を研究した。解の長時間漸近挙動の研究では、ハミルトニアンのある種の非線形性が重要な役割を果たすが、この非線形性の条件についても詳細に調べた。アイコナール方程式に対する動的境界値問題に関して、解の長時間漸近挙動を調べ、極限関数を特徴付ける研究を行った。ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の長時間挙動は、結晶成長モデルのように非強圧的な場合には一般論は適用できない。非強圧的な場合には、長時間挙動が強圧的な場合と大きく異なることを示した。

(5)ハミルトン・ヤコビ方程式に対する次のような漸近問題を研究した。ハミルトン・ヤコビ方程式の加法的固有値問題に対する解の近似法として、対応する最適制御問題に割引

率を加味した最適制御問題を考えて、割引率を含んだハミルトン・ヤコビ方程式の解によって近似する方法が知られている。割引率を0に近づけると、元の加法的固有値問題の解に本当に収束するかという問題である。この漸近問題を割引消去問題と呼ぶ。有界領域上においてノイマン型の境界条件の下であれば、上に述べた近似問題の解が元の問題の解に収束することを証明した。粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に対して同じ漸近問題を研究し、非線形随伴法を適用して、周期境界条件の場合とノイマン境界条件の場合に上記の収束性が成り立つことを証明した。

(6) 待ち行列の制御に関連した退化楕円型ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式に対する非線形ノイマン境界値問題を角(かど)のある領域上で考察した。待ち行列の理論に対して偏微分方程式の方法を適用するときには、角のある領域が重要になる。この境界値問題の一意可解性に関する肯定的な結果を確立した。

(7) 結晶成長モデルの一つとして考えられる全変動流方程式は、その平滑化作用が非局所的である。粘性解の理論を深化させることにより、このような特異拡散方程式について非発散型の場合に解の存在、一意性等の基礎理論を整備した。高次元理論も一部創設した。結晶成長をモデルとした方程式に対して基礎研究を進め、結晶成長の漸近的速度に関する新結果を得た。

(8) 1階微分の項が1次以上の増大度を持つ退化楕円型方程式の非有界粘性解の比較原理を、ある種の線形化を用いて導いた。弱ハルナック不等式を用いて、非有界係数を持った完全非線形2階楕円型方程式の $L_p$ 粘性解の局所最大値原理を示した。これにより、ハルナック不等式が成立することを示した。半線形項と1階微分の項が1次以上の増大度を持つ完全非線形方程式の全空間での粘性解の存在と一意性をABP最大値原理および線形化とKelly-Ossermanのバリアー関数を用いて示した。障害を持った平均曲率流方程式の非有界な粘性解の比較原理と、周期条件下での時空リプシッツ連続になる解の存在を示した。

(9) アイザックス型微分積分方程式の粘性解の優・劣最適性を示すことで、解の一意性を証明した。準線形方程式において、粘性解の一意性が成り立つ方程式の構造を明らかにした。一階微分の強圧項と分数冪ラプラス作用素を持つ方程式の劣解のヘルダー連続性と時間大域的挙動を導いた。

(10) 確率微分方程式の解として定義される一般的な拡散過程のセミマルチンゲール加法的汎関数で、制御項を含むものに関する大偏差確率の最小値を考え、その時間大域的挙動を考察した。その挙動と問題とするセミマルチンゲールの対数モーメント母関数を評価関数とする最小化問題(risk-sensitive control problem)の時間大域的挙動との双

対性を示すことにより、上記最小化大偏差確率の時間大域的評価を得た。また、拡散過程のずれの係数に不確かさを容認した場合に、そのロバストな評価も同様に得られた。対応するエルゴード型ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式とその微分(リスクパラメータに関する微分)として得られる方程式の解析がその基礎となった。

(11) 非完備な市場モデルにおける最適消費・投資問題を無限時間範囲で考察した。対応するハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の解の存在と一意性をリスク回避的、リスク志向的それぞれの場合に示し、強検証定理を示した。強検証定理を示すにあたって、許容戦略のクラスをハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の解を用いて規定したため、解の一意性を示す事が肝要であった。

(12) ベクトル値確率過程の一部の成分を既知とした場合の確率最適輸送問題(以下KRSOTP)の解は、ベクトル値確率変数の一部の成分を既知とした場合の最適輸送問題によって逐次的に構成される非減少三角写像であるKnothe-Rosenblatt rearrangementの確率版である。KRSOTPの双対定理を粘性解による枠組みを用いて既知の結果より弱い仮定の下で証明することに成功した。これにより、KRSOTPの双対問題の最大化列の半凸性が証明できる場合には、KRSOTPの最適解のドリフトベクトルを粘性解の微分の関数の極限として特徴付けられることを示した。また、確率最適輸送問題のゼロ雑音極限によるKRSOTPの最小解の特徴づけも与えた。

(13) 解の滑らかさが期待できない、様々な準線形偏微分方程式や集合値をとる非線形偏微分方程式に対する解の存在及び解の漸近挙動(大域アトラクターの構成等)を非線形発展方程式論の立場から解明した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計54件)

E. S. Al-Aidarous, E. O. Alzahrani, Hitoshi Ishii(石井仁司), A. M. M. Younas, A convergence result for the ergodic problem for Hamilton-Jacobi equations with Neumann-type boundary conditions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 査読有, Vol. 146, no. 2, 2016, pp. 225-242, DOI:10.1017/S0308210515000517

H. Mitake(三竹大寿), A. Siconolfi, H. V. Tran, N. Yamada(山田直記), A Lagrangian approach to weakly coupled Hamilton-Jacobi systems, SIAM J. Math. Anal. 査読有, Vol. 48, no. 2, 2016, 821-846, DOI. 10.1137/15M1010841

Hitoshi Ishii(石井仁司), Panagiotis

E. Souganidis, Metastability for parabolic equations with drift: Part I. Indiana Univ. Math. J. 査読有, Vol. 64, no. 3, 2015, pp.875-913, DOI:10.1512/iumj.2015.64.5559

Y. Giga (儀我 美一), N. Hamamuki, A. Nakayasu, Eikonal equations in metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 査読有, Vol.367, no.1, 2015, pp.49-66, DOI:10.1090/S0002-9947-2014-05893-5

Toshio Mikami (三上 敏夫), Two end points marginal problem by stochastic optimal transportation, SIAM J. Control Optim. 査読有, Vol.53, no.4, 2015, pp.2449-2461, DOI:10.1137/14099070X

Guy Barles, Shigeaki Koike (小池 茂昭), Olivier Ley, Erwin Topp, Regularity results and large time behavior for integro-differential equations with coercive Hamiltonians. Calc. Var. Partial Differential Equations 査読有, Vol.54, no. 1, 2015, pp.539-572, DOI:10.1007/s00526-014-0794-x

H. Nagai (長井 英生), H-J-B equations of optimal consumption-investment and verification theorems, Applied Mathematics and Optimization 査読有, Vol. 71, no.2, 2015, pp.279-311, DOI:10.1007/s00245-014-9258-0

H. Mitake (三竹 大寿), H. V. Tran, Large-time behavior for obstacle problems for degenerate viscous Hamilton--Jacobi equations, Calc. Var. Partial Differential Equations. 査読有, Vol.54, no. 2, 2015, pp.2039-2058, DOI:10.1007/s00526-015-0855-9

Mitsuharu Otani (大谷 光春), Vasile Staicu, Existence results for quasilinear elliptic equations with multivalued nonlinear terms. Set-Valued Var. Anal. 査読有, Vol.22, no.4, 2015, pp.859-877, DOI:10.1007/s11228-014-0289-0

Naoyuki Ichihara (市原 直幸), The generalized principal eigenvalue for Hamilton-Jacobi-Bellman equations of ergodic type. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 査読有, Vol.32, no. 3, 2015, pp.623-650, DOI:10.1016/j.anihpc.2014.02.003

E. S. Al-Aidarous, E. O. Alzahrani, Hitoshi Ishii (石井 仁司), A. M. M. Younas,

Asymptotic analysis for the eikonal equation with the dynamical boundary conditions. Math. Nachr. 査読有, Vol. 287, no. 14-15, 2014, pp.1563-1588, DOI:10.1002/mana.201300224

M.-H. Giga, Y. Giga (儀我 美一), N. Pozar, Periodic total variation flow of non-divergence type in  $R^n$ , J. Math. Pures Appl. 査読有, Vol.102, no.1, 2014, pp.203-233, DOI:10.1016/j.matpur.2013.11.007

Y. Giga (儀我 美一), Q. Liu, H. Mitake (三竹 大寿), Singular Neumann problems and large-time behavior of solutions of noncoercive Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 査読有, Vol.366, no. 4, 2014, pp.1905-1941, DOI:10.1090/S0002-9947-2013-0590

Katsuyuki Ishii (石井 克幸), An approximation scheme for the anisotropic and nonlocal mean curvature flow. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 査読有, Vol.21, no. 2, 2014, pp.219-252 DOI:10.1007/s00030-013-0244-z

Guy Barles, Hitoshi Ishii (石井 仁司), Hiroyoshi Mitake (三竹 大寿), A new PDE approach to the large time asymptotics of solutions of Hamilton-Jacobi equations. Bull. Math. Sci. 査読有, Vol. 3, no. 3, 2013, pp.363-388, DOI:10.1007/s13373-013-0036-0

Y. Giga (儀我 美一), N. Hamamuki, Hamilton-Jacobi equations with discontinuous source terms, Commun. Partial Differential Equations 査読有, Vol.38, no.2, 2013, pp.199-243, DOI:10.1080/03605302.2012.739671

Shigeaki Koike (小池 茂昭), Andrej Swiech, Representation formulas for solutions of Isaacs integro-PDE. Indiana Univ. Math. J. 査読有, Vol.62, no. 5, 2013, pp.1473-1502, DOI:10.1512/iumj.2013.62.5109

Naoyuki Ichihara (市原 直幸), Criticality of viscous Hamilton-Jacobi equations and stochastic ergodic control. J. Math. Pures Appl. (9) 査読有, Vol.100, no. 3, 2013, pp.368-390. DOI:10.1016/j.matpur.2013.01.005

Norihisa Ikoma, Hitoshi Ishii (石井 仁司), Eigenvalue problem for fully nonlinear second-order elliptic PDE on

balls. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 査読有, Vol. 29, no. 5, 2012, pp.783-812, DOI:10.1016/j.anihpc.2012.04.004

Guy Barles, Hitoshi Ishii (石井 仁司), Hiroyoshi Mitake(三竹 大寿), On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations associated with nonlinear boundary conditions. Arch. Ration. Mech. Anal. 査読有, Vol. 204, no. 2, 2012, pp. 515-558. DOI:10.1007/s00205-011-0484-1

⑳Hitoshi Ishii (石井 仁司), Panagiotis E. Souganidis, A pde approach to small stochastic perturbations of Hamiltonian flows. J. Differential Equations 査読有, Vol. 252, no. 2, 2012, pp. 1748-1775, DOI:10.1016/j.jde.2011.08.036

㉑T. Eto, Y. Giga (儀我 美一), K. Ishii (石井 克幸), An area minimizing scheme for anisotropic mean-curvature flow, Advances in Differential Equations 査読有, Vol.17 no.11-12, 2012, pp.1031-1084, <http://projecteuclid.org/euclid.ade>

㉒H. Nagai (長井 英生), Downside risk minimization via a large deviations approach, Annals of Applied Probability, 査読有, Vol.22, 2012, pp.608-669, DOI:10.1214/11-AAP781

㉓Hitoshi Ishii (石井 仁司), Long-time asymptotic solutions of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions. Calc. Var. Partial Differential Equations 査読有, Vol. 42, no. 1-2, 2011, pp. 189 - 209, DOI:10.1007/s00526-010-0385-4

㉔Hitoshi Ishii (石井 仁司), Weak KAM aspects of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions. J. Math. Pures Appl. 査読有, (9) Vol. 95, no. 1, 2011, pp.99-135, DOI:10.1016/j.matpur.2010.10.006

㉕Yasuhiro Fujita (藤田 安啓), An optimal logarithmic Sobolev inequality with Lipschitz constants. J. Funct. Anal. 査読有, Vol.261, no. 5, 2011, pp.1133-1144, DOI:10.1016/j.jfa.2011.04.011

〔学会発表〕(計 88 件)

Hitoshi Ishii, Metastability for parabolic equations with drift, 北航数学フォーラム, 2016年3月10日, 北京航空航

天大学, 北京(中国)

Hiroyoshi Mitake, On asymptotic speed of the crystal growth, 2016年3月7日, Mathematics Colloquium in Univ. Madison-Wisconsin, Madison (米国)

Hitoshi Ishii, A boundary value problem of the Neumann type for elliptic equations on the positive orthant, Mostly Maximum Principle, 2015年9月16日, アグロポリ(イタリア)

Toshio Mikami, Two end points boundary value problems on stochastic optimal transportation and Fokker-Planck equation, SIAM Conference on Control and Its Applications, 2015年7月10日, Maison de la Mutualite, パリ(フランス)

Yoshikazu Giga, On large time behavior of solutions to a level set eikonal mean curvature flow equation with source terms for nucleation, The Hamilton-Jacobi Equation: At the crossroads of PDE, dynamical systems & geometry, 2015年6月24日, Cortona (イタリア)

Hitoshi Ishii, Convergence of solutions of discount problems to the ergodic problem in optimal control, Recent Advances in Analysis and Geometry Workshop at TSIMF, 2014年12月19日, 三亜(中国)

Shigeaki Koike, A note on comparison principle for quasilinear equations, AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014年7月8日, Madrid (スペイン)

Hideo Nagai, Estimates of certain large deviation probabilities for controlled semi-martingales, Perspective in Analysis and Probability, Conference in honor of Freddy Delbaen, 2012年9月25日, ETH, Zurich (スイス)

Shigeaki Koike, On the ABP maximum principle for  $L_p$ -viscosity solutions of fully nonlinear PDE, The 4th MSJ-SI Nonlinear Dynamics and PDE 国際研究集会, 2011年9月15日, 九州大学(福岡県福岡市)

Yoshikazu Giga, A few topic on Hamilton-Jacobi equations arising from the theory of crystal growth, International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM), 2011年7月18日, Vancouver (カナダ)

〔図書〕(計3件)

Hideo Nagai(長井 英生), Encyclopedia of Systems and Control, Ed. J. Baillieu AND T. SAMAD, Springer-Verlag, 2015, 1554 pp. (Risk-sensitive Stochastic Control, pp. 1156-1161)  
DOI : 10.1007/978-1-4471-5102-9\_233-311

Hitoshi Ishii(石井 仁司), Fondazione CIME/CIME Foundation Subseries. Springer, Heidelberg; Fondazione C.I.M.E., Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications, 2013, xvi+301 pp. (pp. 111-249),  
DOI:10.1007/978-3-642-36433-4

大谷 光春, 常微分方程式論, 理工基礎, サイエンス社, 2011, 215pp.

〔その他〕

ホームページ

<http://www.edu.waseda.ac.jp/~ishii/>

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

石井 仁司 (ISHII, Hitoshi)  
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授  
研究者番号 : 70102887

### (2)研究分担者

大谷 光春 (OTANI, Mitsuharu)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号 : 30119656

長井 英生 (NAGAI, Hideo)  
関西大学・工学部・教授  
研究者番号 : 70110848

儀我 美一 (GIGA, Yoshikazu)  
東京大学・数理科学研究科・教授  
研究者番号 : 70144110

小池 茂昭 (KOIKE, Shigeaki)  
東北大学・理学研究科・教授  
研究者番号 : 90205295

三上 敏夫 (MIKAMI, Toshio)  
津田塾大学・学芸学部・教授  
研究者番号 : 70229657

三竹 大寿 (MITAKE, Hiroyoshi)  
広島大学・サステナブル・ディベロップメント実践研究センター・テニュアトラック講師  
研究者番号 : 90631979

### (3)連携研究者

山田 直記 (YAMADA, Naoki)  
福岡大学・理学部・教授  
研究者番号 : 50030789

石井 克幸 (ISHII, Katsuyuki)  
神戸大学・海事科学研究科・教授  
研究者番号 : 40232227

市原 直幸 (ICHIHARA, Naoyuki)  
青山学院大学・理工学部・准教授  
研究者番号 : 70452563

藤田 安啓 (FUJITA, Yasuhiro)  
富山大学・理工学研究部・教授  
研究者番号 : 10209067