

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 7 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2011～2014

課題番号：23244016

研究課題名(和文)作用素環論と数理論理学の新たな展開

研究課題名(英文)A new development of operator algebras and mathematical physics

研究代表者

河東 泰之(Kawahigashi, Yasuyuki)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：90214684

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 38,000,000円

研究成果の概要(和文)：頂点作用素代数と作用素環の局所共形ネットはカイラル共形場理論を数学的に扱うための二つの枠組みであり、両者の間に様々な類似性はあるものの、これまで直接的な関係は見つかっていなかった。Carpi, Longo, Weiner と共に、強局所性という条件を付ければ、頂点作用素代数から局所共形ネットを構成することができ、この局所共形ネットから元の頂点作用素代数が復元できることを示した。さらに強局所性が成り立つための簡単な十分条件も示した。これは十数年来の懸案を解決するものである。さらに頂点作用素代数としての自己同型群と局所共形ネットとしての自己同型群が同じであることも示した。

研究成果の概要(英文)：Vertex operator algebras and local conformal nets (of operator algebras) are two mathematical frameworks to study chiral conformal field theory. Many analogies between the two have been known, but no direct relations were known so far. With Carpi, Longo and Weiner, we have proved that we can construct a local conformal net from a strongly local vertex operator algebra and we can also recover the original vertex operator algebra from this resulting local conformal net. We have further given a simple sufficient condition for strong locality. This gives a solution to an important problem studied over more than ten years. We have also shown that the automorphism group of a vertex operator algebra and that of the corresponding local conformal net coincide. This result applies to many examples including the Moonshine vertex operator algebra. (The case of the Moonshine vertex operator algebra was known before.)

研究分野：作用素環論

 キーワード：作用素環 共形場理論 部分因子環 頂点作用素代数 数理論理学 超対称性 モジュラーテンソル圏  
境界共形場理論

### 1. 研究開始当初の背景

場の量子論の数学的研究は, Wightman 場に基づく流儀が古くからよく知られているが, それに対し, 観測可能量の生成する作用素環の族を研究対象とする, 代数的場の量子論と呼ばれる方法が 50 年ほど前に成立した. 長い間, 進歩が速いとは言いがたかったが, 2 次元 Minkowski 空間の上の共形場理論については, この 20 年ほどの間に大きな進展があった. これはほとんど数学の全分野と関係すると言っていいほどの大きなテーマであるが, 作用素環論の立場からは, 1 次元円周上の区間でパラメライズされた作用素環の族を数学的に研究することが主要な問題となる. この族は, しかるべき公理を満たすもので, 局所共形ネットと呼ばれる. この局所共形ネットについて, 例を作ったり, 不変量を考察したり, 分類したり, 種々の条件の間の関係を考察したりすることが数学的な研究である. この理論が作用素環論における Jones の subfactor 理論と深い関係を持つことは, Longo によって 1980 年代末に明らかにされた. また subfactor 理論の解析的側面は Popa による進展がはなばなししい.

### 2. 研究の目的

具体的な研究課題を列挙する.

- (1) 表現論的不変量による局所共形ネットの分類
- (2) 与えられた有限群の, 局所共形ネットの自己同型群としての実現
- (3) 任意のモジュラー圏の, 局所共形ネットの表現による実現
- (4)  $SL(2, \mathbb{Z})$  の二つの表現の一致

(1)はさらに, ユニタリな頂点作用素代数との, 表現論まで込めた対応を確立することが大問題である. これは, Lie 群と Lie 環の対応をさらに高度にしたような種類のものであるはずだが, 現在わかっていることはごく少ない. 特に, 河東が Longo-Mueger と導入した局所共形ネットの完全有理性と, ユニタリな頂点作用素代数の  $C_2$  有限性が対応するのではないかと予想している. Kac-Moody Lie 環から生じる局所共形ネットの完全有理性を示すこともこれに関連する問題である. 次に, (2)は, 「与えられた有限群を有理数体上の Galois 群として実現せよ」という Galois の逆問題(現在も未解決)と類似の問題と考えられる. Monster 群に対する Moonshine 頂点作用素代数に対応する Moonshine ネットも河東と Longo によって構成されているが, これを特別なケースとして含む問題であるので, 一般的解決は容易ではない. しかし, これまでの作用素環論の研究の歴史から言えば, 統一的構成が期待されるので, これを通じ, Moonshine 予想の研究にも貢献したい.

(3)では, 与えられたモジュラー圏の実現が問題となる. これはある意味で上の(2)と双対的

な問題である. 作用素環論では, 量子群や, Kac-Moody Lie 環の理論では知られていない, 奇妙なモジュラー圏の例がいくつか知られている. これを, 局所共形ネットの表現として実現することは大きな問題である. 最近の Evans-Gannon の論文は有用な示唆を与えていると考えられる.

(4)は, spin-statistics 定理のある種の拡張とみなされるものである. これまで知られている例ではすべてうまくいっているので, 一般的に正しいと予想している, これは, 非可換幾何学を通じて超共形場理論と関係していることが, 最近の河東と, Carpi-Hillier-Longo の論文から期待される. これをさらに発展させるとミラーシンメトリーの作用素環的研究につながっていくと考えられる.

### 3. 研究の方法

本計画は分担者のほかに, 外国人共同研究者として, 次の 3 人を加えたグループで行う. Vaughan F. R. Jones (California 大学 Berkeley 校):

Subfactor 理論を創始し, その応用として Jones 多項式を発見して Fields 賞を受賞. Roberto Longo (Rome 大学): 共形場理論の作用素環論的研究において最近 20 年間の研究をリードする第一人者. ローマに新設された数学・理論物理学研究センター所長.

Sorin Popa (California 大学 Los Angeles 校): 作用素環の分類理論において, von Neumann 以来の歴史的難問を次々と解決. ICM-2006 の全体講演者.

また, 研究期間中最大のイベントは, 2011 年度の京都大学数理解析研究所のプロジェクト研究「作用素環とその応用」である. このプロジェクトの組織委員は, 代表の河東のほか, 本申請の連携研究者 4 名プラス岡本久氏(京大数理研)である.(岡本氏は, 京大数理研側との種々の連絡のため入っているもので, 言うまでもなく専門は作用素環論ではない.)具体的には, 次の研究集會と, 毎週のセミナーを計画している.

Conference on  $C^*$ -Algebras and Related Topics:

2011 年 9 月 5 日(月)~9 日(金).

Winter School on Operator Algebras:

2011 年 12 月 7 日(水)~16 日(金).

Conference on von Neumann Algebras and Related Topics:

2012 年 1 月 9 日(月)~13 日(金).

世界の作用素環論を代表する研究者を集めるため, 特別な額の研究費が必要である. これが, 2011 年度の外国旅費(外国人招聘)が突出している理由である.

以上について, 作用素環論および, その数理解析物理学への応用について, 世界最高水準の研究を行う計画である.

### 4. 研究成果

Carpi, Hillier, Longo, Xu と共に, 中心電

荷  $c$  が離散系列  $c < 3$  に属するときの, Neveu-Schwarz 代数の真空表現から生じる  $N=2$  超 Virasoro ネットと非可換幾何の関係について研究した.

$N=2$  超 Virasoro ネットからは, その普遍  $C^*$ -環が生じるが, ある種の DHR 表現がその  $C^*$ -環の  $K_0$ -群の元を与えることを示し, 一方, これらの DHR 表現が, Connes の意味での entire cyclic cohomology の元,  $JL_0$ -cocycle を生じること示し, それらの間の index pairing を計算し, Kronecker が生じることを示した.

また, この流れの中で, 物理学者の予想していた, character formula の新しい証明を作用素環論を用いて与えた.

Carpi, Longo と共に境界共形場理論を作用素環論の立場から研究した. 具体的には, 2次元 Minkowski 空間上の完全有理的 CFT ネットに対し, それと局所的に同型な境界共形ネットを作り出す一般的方法を与えた.

Suthichitranont と共に, 正則局所共形枠付きネットの構成を行った. これは  $c=1/2$  の Virasoro ネット有限個のテンソル積を, ある条件を満たす binary code の組  $(C,D)$  を用いて延長するもので, Lam-山内の頂点作用素の結果の作用素環版にあたる.

緒方, Stormer と共に III 型因子環  $M$ , その有限次元  $C^*$ 部分環  $A$ ,  $M$  上の正規状態  $\psi_i$ ,  $i=0,1,\dots,n$ , ( $\psi_0$  は忠実) に対し,  $M$  の unitary  $u$  があって,  $A$  上  $Ad u \psi_i = \psi_0$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , となることを示した.

Bischoff, Longo と共にモジュラーテンソル圏から生じる  $Q$ -system について, 一般化された Longo-Rehren subfactor の構成と, Fuchs-Runkel-Schweigert の full center の構成は同じものであることを証明した. これは Kong と Runkel によって予想されていたものである. さらにその応用として, 境界共形場理論における境界条件の分類を行い, 境界の除去と添加の関係を明らかにした.

Bischoff, Longo, Rehren と共に conformal field theory における phase boundary, topological defect の研究を作用素環の立場から行った. 代数的場の量子論における phase boundary の定義を行い, その基本的性質を研究した. 特に, 二つの  $Q$ -system の braided product の既約分解によってすべての phase boundary が生じることを示した. また, 各 phase boundary は二つの  $Q$ -system の bimodule として表させることを示した. さらに Bischoff, Longo, Rehren と共に, factoriality を仮定しない  $Q$ -system の一般論を整備した.

頂点作用素代数と(作用素環の)局所共形ネットはカイラル共形場理論を数学的に扱うための二つの枠組みであり, 両者の間に様々な類似性はあるものの, これまで直接的な関係は見つかっていなかった. Carpi, Longo, Weiner と共に, 強局所性という条件を付ければ頂点作用素代数から局所共形ネットを

構成することができ, この局所共形ネットから元の頂点作用素代数が復元できることを示した. さらに強局所性が成り立つための簡単な十分条件も示した. これは十数年来の懸案を解決するものである. さらに頂点作用素代数としての自己同型群と局所共形ネットとしての自己同型群が同じであることも示した. この結果は, (すでに分かっていた) ムーンシャイン頂点作用素代数を含め多くの例に適用できる.

物質のトポロジカル相の間の gapped domain wall というものが物性物理で研究されているが, その数学的定義を与え, 2015年の Lan, Wang, Wen の予想は正しくないことを示した.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

- (1) S. Carpi, Y. Kawahigashi, R. Longo, How to add a boundary condition, Commun. Math. Phys. 322 (2013), 149-166.
- (2) Y. Kawahigashi, N. Suthichitranont, Construction of holomorphic local conformal framed nets, Internat. Math. Res. Notices 2014 (2014), 2924-2943.
- (3) Y. Kawahigashi, Y. Ogata, E. Stormer, Normal states of type III factors, Pacific J. Math. 267 (2014), 131-139.
- (4) S. Carpi, R. Hillier, Y. Kawahigashi, R. Longo, F. Xu,  $N=2$  superconformal nets, Commun. Math. Phys. 336 (2015), 1285-1328.
- (5) Y. Kawahigashi, Conformal field theory, tensor categories and operator algebras, J. Phys. A 48 (2015), 303001.
- (6) Y. Kawahigashi, A remark on gapped domain walls between topological phases, Lett. Math. Phys. 105 (2015), 893-899.
- (7) M. Bischoff, Y. Kawahigashi, R. Longo, Characterization of 2D rational local conformal nets and its boundary conditions: the maximal case, Doc. Math. 20 (2015), 1137-1184.
- (8) M. Bischoff, Y. Kawahigashi, R. Longo, K.-H. Rehren, Phase boundaries in algebraic conformal QFT, Commun. Math. Phys. 342 (2016), 1-45.
- (9) S. Carpi, Y. Kawahigashi, R. Longo, M. Weiner, From vertex operator algebras

- to conformal nets and back, to appear in Mem. Amer. Math. Soc.
- [学会発表](計 34 件)
- (1) Y. Kawahigashi, N=2 superconformal field theory and noncommutative geometry, EU-NCG 4th Annual Meeting, Bucharest (Romania), April 2011.
- (2) Y. Kawahigashi, N=2 superconformal field theory and operator algebras, II\_1 factors: rigidity, symmetries and classification, Paris (France), May 2011.
- (3) Y. Kawahigashi, N=2 superconformal field theory and operator algebras, Conformal field theories and tensor categories, Beijing (China), June 2011.
- (4) Y. Kawahigashi, Conformal field theory, von Neumann algebras and noncommutative geometry, The Special Week on Operator Algebras, East China Normal University (China), June 2011.
- (5) Y. Kawahigashi, N=2 superconformal field theory and noncommutative geometry, NITheP Workshop 2011 "Constructive and Perturbative Aspects of Quantum Field Theory", Durban (South Africa), August 2011.
- (6) Y. Kawahigashi, Superconformal field theory and noncommutative geometry, Operator Algebras & Quantum Groups, Warsaw (Poland), September 2011.
- (7) Y. Kawahigashi, N=2 superconformal field theory and noncommutative geometry, 14th Workshop: Non-commutative harmonic analysis, Będlewo (Poland), September 2011.
- (8) Y. Kawahigashi, Symmetries in conformal field theory, operator algebras and noncommutative geometry, Todai Forum 2011 -- Geometry and Dynamics, Lyon (France), October 2011.
- (9) Y. Kawahigashi, Superconformal field theory and operator algebras, Noncommutative Geometry, Cardiff (U.K.), April 2012.
- (10) Y. Kawahigashi, Superconformal field theory and noncommutative geometry, The Tenth Spring Institute on Noncommutative Geometry and Operator Algebras, Nashville (U.S.A.), May 2012.
- (11) Y. Kawahigashi, 共形場理論の数学, 研究会「物質科学の数学的手法と数理論理」, 理研, 2012年6月.
- (12) Y. Kawahigashi, Superconformal field theory and noncommutative geometry, The 24th International Conference on Operator Theory, Timisoara (Romania), July 2012.
- (13) Y. Kawahigashi, Superconformal field theory and operator algebras, XXth Oporto Meeting on Geometry, Topology and Physics, Oporto (Portugal), July 2012.
- (14) Y. Kawahigashi, Operator algebras and vertex operator algebras, Conference on Groups, VOAs and Related Structures in Honor of Masahiko Miyamoto, 筑波大学, September 2012.
- (15) Y. Kawahigashi, Superconformal field theory, boundary conformal field theory and noncommutative geometry, China-Japan Conference on Noncommutative Geometry and K-Theory, 長春 (China), June 2013.
- (16) Y. Kawahigashi, Trivial representation theory in conformal field theory and operator algebras, Joint International Meeting of the American Mathematical Society and the Romanian Mathematical Society, Alba Iulia (Romania), June 2013.
- (17) Y. Kawahigashi, Conformal field theory, operator algebras and tensor categories, Mathematics and Quantum Physics, Roma (Italy), July 2013.
- (18) Y. Kawahigashi, Local conformal nets with trivial representation theory, Subfactors in Maui, Hawaii (U.S.A.), July 2013.
- (19) Y. Kawahigashi, Operator algebras and conformal field theory, Mathematical Statistical Physics, 京都大学基礎物理学研究所, 2013年7月.
- (20) Y. Kawahigashi, Boundary conformal field theory, operator algebras and vertex operator algebras, Majorana Theory, the Monster and Beyond, Imperial College London (U.K.), September 2013.

- (21) Y. Kawahigashi, Conformal field theory and operator algebras, JSPS-DST Asian Academic Seminar 2013 "Discrete Mathematics & its Applications", Tokyo (Japan), November 2013.
- (22) Y. Kawahigashi, Full conformal field theories, tensor categories and subfactors, Subfactors and Fusion Categories, BIRS (Canada), April 2014.
- (23) Y. Kawahigashi, Boundary conformal field theory, subfactors and tensor categories, NCGOA Spring Institute 2014: Subfactors, CFT, and VOA, Nashville (U.S.A.), May 2014.
- (24) Y. Kawahigashi, Full and boundary conformal field theory from operator algebras, Operator Algebras and Mathematical Physics, Dalian (China), June 2014.
- (25) Y. Kawahigashi, Boundary conformal field theory and subfactors, The 25th International Conference on Operator Theory, Timisoara (Romania), July 2014.
- (26) Y. Kawahigashi, Subfactors, tensor categories and boundary conformal field theory, 16th Workshop: Non-commutative harmonic analysis: Random matrices, representation theory and free probability, with applications, Będlewo (Poland), July 2014.
- (27) Y. Kawahigashi, Subfactors and phase boundaries in conformal field theory, Subfactor Theory in Mathematics and Physics, Hawaii (U.S.A.), July 2014.
- (28) Y. Kawahigashi, Boundary conformal field theory and subfactors, ICM Satellite Conference on Operator Algebras and Applications, Cheongpung (Korea), August 2014.
- (29) Y. Kawahigashi, Full and boundary conformal field theories and subfactors, Operator and Geometric Analysis on Quantum Theory, Levico Terme (Italy), September 2014.
- (30) Y. Kawahigashi, Boundary conformal field theory and operator

algebras, RIKKYO MathPhys 2015 --- Gauge Theory, CFT and Integrability ---, 立教大学 (Japan), January 2015.

- (31) Y. Kawahigashi, Boundary conformal field theory and subfactors, 4th Conference of Settat on Operator Algebras and Applications, Marrakech (Morocco), January 2015.
- (32) Y. Kawahigashi, From vertex operator algebras to local conformal nets and back, International Conference on Subfactor Theory in Mathematics and Physics, Qinhuangdao (China), July 2015.
- (33) Y. Kawahigashi, From vertex operator algebras to operator algebras and back, Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics, 津田塾大学 (Japan), August 2015.
- (34) Y. Kawahigashi, From vertex operator algebras to operator algebras and back, Lie Algebras, Vertex Operator Algebras, and Related Topics, University of Notre Dame (U.S.A.), August 2015.

〔図書〕(計1件)

M. Bischoff, Y. Kawahigashi, R. Longo, K.-H. Rehren, Tensor categories and endomorphisms of von Neumann algebras (with applications to Quantum Field Theory), SpringerBriefs in Mathematical Physics Vol. 3, 2015.

〔産業財産権〕

出願状況 (計0件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 出願年月日：  
 国内外の別：

取得状況 (計0件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 取得年月日：  
 国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

河東 泰之 (KAWAHIGASHI, Yasuyuki)  
東京大学大学院数理科学研究科教授  
研究者番号: 90214684

### (3) 連携研究者

泉 正己 (IZUMI, Masaki)  
京都大学大学院理学研究科教授  
研究者番号: 80232362

小沢 登高 (OZAWA, Narutaka)  
京都大学数理解析研究所教授  
研究者番号: 60323466

松井 宏樹 (MATUI, Hiroki)  
千葉大学大学院理学研究科教授  
研究者番号: 40345012

植田 好道 (UEDA, Yoshimichi)  
九州大学大学院数理学研究院准教授  
研究者番号: 00314724