様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号：１４３０１

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2011～2015

課題番号：２３３４０００５

研究課題名（和文）インスタントンのモジュライ空間の幾何と表現論

研究課題名（英文）Geometry of instanton moduli spaces and representation theory

研究代表者

中島　啓（Nakajima, Hiraku）

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：００２０１６６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　7,600,000円

研究成果の概要（和文）：物理学者の Alday-Gaiotto-立川によって、ゲージ理論とW代数との対応が発見された。これを、数学的に厳密な立場から「インスタントンの枠付きモジュライ空間の上で、同変コホモロジー群を考えると、それがW 代数の表現の構造を持ち、様々なコホモロジー類が、W 代数の頂点作用素などを用いて書き下される」と理解し、これに関連した研究を行った。特に、Braverman-Finkelbergとの共同研究で、ADE型のインスタントンの枠付きモジュライ空間のUhlenbeck部分コンパクト化の同変交叉コホモロジーに期待される表現の構造を定義した。

研究成果の概要（英文）：A duality between gauge theories and W-algebras was found by physicists Alday-Gaiotto-Tachikawa. We understand it as a mathematically rigorous statement that the equivariant cohomology group of a framed moduli space of instantons has a structure of a representation of a W-algebra, and various cohomology classes are described as vertex operators of the W-algebra. We study several results in this direction. In particular, jointly with Braverman-Finkelberg, we prove that the equivariant intersection cohomology group of a framed moduli space of instantons (more precisely its Uhlenbeck partial compactification) has an expected structure of a representation.

研究分野：数学

キーワード：代数学　幾何学　表現論

１．研究開始当初の背景

(1) 2010 年に代表者は、Göttsche-吉岡との共同研究で、4 次元のゲージ理論にあらわれる Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量が等価であるという、Witten の予想を代数曲面の場合に証明した。これをさらに深化させることを考える。

(2) また、物理学者の Alday-Gaiotto-立川により、4 次元のゲージ理論と 2 次元の共形場理論の間に関係があるという、いわゆる AGT 対応が発見された。この対応は仮想的な 6 次元の場の理論の存在からの帰結であり、数学的に厳密な証明にはほど遠い。そこで、4 次元と 2 次元の理論を、幾何学的表現論の手法を用いて結びつけることを考える。

２．研究の目的

(1) 4 次元多様体上のインスタントン、もしくは代数曲面上の連接層の全体をパラメトライズするモジュライ空間は、豊富な構造を持つことが知られている。特に、望月拓郎や代表者とその共同研究者の研究を通じて、楕円曲線や保型形式とのつながりが明らかにされた。本研究の一つの目的は、このつながりをさらに深化させることである。

(2)また、最近、物理学者の Alday-Gaiotto-立川によって発見されたゲージ理論と W 代数との対応を、数学的に厳密な立場から理解し、さらに W 代数の表現論に応用すること、そして上の代表者等の研究と結びつけることが次の目的である。

３．研究の方法

(1)Witten の予想については、simple type とは限らない場合に保形形式を用いて二つの不変量をつなげる公式を証明することを試みる。

(2)AGT 対応については、代表者が今まで用いてきた箙多様体の同変 K 群への量子ループ代数の表現の構成の方法を修正しつつ適用することを試みる。

４．研究成果

Witten 予想の研究については、当初期待していた成果が得られなかった。AGT 対応に関しては以下のような成果を各年度に得た。

2011 年度においては、AGT 対応に関して、shifted Yangian の表現と手鋸箙多様体の同変コホモロジーの関係について研究した。これは本来の AGT 対応がアファイン型であるのに対し、有限型と考えられる。また、有限型とアファイン型の一番の大きな違いは、有限型の場合には余積が、 Yangian 代数に、代数的に定義されていたことであった。この違いを埋めるために、一方で、アファイン型 Yangian 代数の余積の代数的な定義を考察し、これも成功することができた。

2012 年度は、A 型の場合の Maulik-Okounkov, Schiffmann-Vasserot によって与えられた証明を一般の群に拡張するために、枠組みを偏屈層に関する双曲的制限関手の考察であるととらえて、証明のための枠組みを与えた。さらに、モジュライ空間の基本類の性質を調べるために、W 代数に関して、通常のパラメータは複素数であると考えて定義される代数を、多項式環上で定義する必要が生じた。これは、Feigin-Frenkel の構成を、多項式環上で実行することになり、証明の細部を与えた。

2013 年度は、双曲的制限関手の性質を、Braverman-Finkelberg と共同で研究し、一番大切な偏屈層が偏屈層に移されるという性質を証明した。これを用いて ADE 型インスタントンのモジュライ空間の同変交叉コホモロジーの上に W 代数の表現の構造を構成した。

2014 年度は、当初の研究目的にはなかったが、新しく 3 次元の N=4 超対称ゲージ理論のクーロン枝の研究を始めた。ゲージ理論のクーロン枝は、(一般には特異点をもつ)超ケーラー多様体であり、物理学者が研究していたが、その数学的に厳密な定義を与える試みである。特に、複素射影直線から超ケーラー商へのゲージσ模型をとり、そのモジュライ・スタックの自然な消滅サイクルに係数をもつコホモロジーを考える。その次元を重み付きで計算し、Cremonesi-Hanany-Zaffaroni が物理学的な考察で導き出していたモノポール公式と一致していることを検証した。

2015 年度は、クーロン枝の考察をさらに進め、Braverman-Finkelberg との共同研究で、上のコホモロジーの上に(ある条件のもとで)可換環の構造を導入し、そのスペクトラムとして、クーロン枝をアファイン代数多様体として定義することを提唱した。特に、箙ゲージ理論のクーロン枝を、具体的な複素シンプレクティック多様体と

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 11 件）

① Hiraku Nakajima, Refined Chern-Simons theory and Hilbert schemes of points on the plane, Contemporary Math. 610, 2014,305-331, 10.1090/conm/610/12157

② Hiraku Nakajima, Quiver varieties and tensor products, II Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 40, 2013, 403-428, 10.1007/978-1-4471-4863-0_16

③ Hiraku Nakajima, Handsaw quiver varieties and finite W-algebras, Moscow Mathematical Journal, 12, 2012,633-666, http://www.ams.org/journals/distribution/mmj/vol12-3-2012/nakajima.pdf

④ Lothar Gottsche, Hiraku Nakajima and Kota Yoshioka, Donaldson = Seiberg-Witten from Mochizuki's formula and instanton counting, Publ. of RIMS, 47, 2011, 307-359, 10.2977/PRIMS/37

〔学会発表〕（計 35 件）

① Hiraku Nakajima, Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional N = 4 gauge theories, Shanghai Conference on Representation Theory, 2015/12/10, Shanghai(中国)

② Hiraku Nakajima, Coulomb branches and refined DT invariants, Moduli spaces in algebraic geometry and mathematical physics, 2015/9/17, Chern Institute of Mathematics, Tianjin(中国)

③ Hiraku Nakajima, Coulomb branches and DT invariants, Derived structures in geometry and representation theory, 2015/8/31, Oxford Univ., Oxford (英国)

④ Hiraku Nakajima, 3-dimensional gauge theory and representation theory, 京都賞ワークショップ, 2014/11/12, 京都国際会館（京都府・京都市）

⑤ Hiraku Nakajima, Instantons moduli spaces and W-algebras, Chern-Simons Research Lectures, 2013/12/2,4,6, Berkeley (USA)

⑥ Hiraku Nakajima, Perverse sheaves on instanton moduli spaces and AGT conjecture, Moduli Spaces and their Invariants in Mathematical Physics, 2013/6/3, CIRM, Montreal (Canada)

⑦ Hiraku Nakajima, Monoidal categorification revisited, International Conference on Representations of Algebras (ICRA 2012), 2012/8/14, Bielefeld (Germany)

⑧ Hiraku Nakajima, Coproduct on Yangian Perspectives in Representation Theory, 2012/5/14, Yale, New Heaven (USA)

⑨ Hiraku Nakajima, Handsaw quiver varieties and finite W-algebras, Algebras, Quivers, and Representations, 2011 Abel Symposium, 2011/5/21, Sognefjord (Norway)

⑩ Hiraku Nakajima, Instanton counting and Donaldson invariants, Groupement de Recherche Géométrie Algébrique et Géométrie Complexe, 2012-03-12～14, CIRM, Luminy (France)

⑪ Hiraku Nakajima, Cluster algebras and canonical base, Cluster algebras, representation theory, and Poisson geometry, 2011/9/6, Banff (Canada)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajim
a

６．研究組織

(1)研究代表者

中島　啓　　　　(NAKAJIMA, Hiraku)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00201666

(2)研究分担者

(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

吉岡　康太 (YOSHIOKA, Kota)
神戸大学・理学研究科･教授
研究者番号：40274047