

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 21 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23340011

研究課題名(和文) マックイ対応とホモロジカルミラー対称性に関わる導来圏の研究

研究課題名(英文) Derived categories related to the McKay correspondence and Homological Mirror Symmetry

研究代表者

上原 北斗 (Uehara, Hokuto)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号：80378546

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,800,000円

研究成果の概要(和文)：代数多様体の導来圏に関して、多面的に研究した。(1) 双有理トレリ問題に関する反例の構成、(2) トーリック多様体のフロベニウス写像を使った例外生成系の構成、(3) Hirzebruch曲面上の例外層の分類、さらに(4) 楕円曲面上の導来圏の自己同値群の決定を行った。双有理トレリ問題に関しては、楕円曲面のフーリエ向井パートナーの研究を応用させたものである。フロベニウス写像での例外生成系の論文はMcKay対応の一般化と呼べるものである。また楕円曲面の導来圏の自己同値群の研究は、より広く代数曲面の導来圏の自己同値群の研究に結びつくと期待している。

研究成果の概要(英文)：We studied the derived categories of coherent sheaves on algebraic varieties from many aspects. We obtained (1) a counterexample to birational Torelli problem, (2) full exceptional collections on toric varieties by Frobenius morphisms, (3) a classification of exceptional sheaves on a Hirzebruch surface and (4) a description of the autoequivalences groups on minimal elliptic surfaces. We applied our study on Fourier--Mukai partners on elliptic surfaces to obtain (1). The result (2) is a generalization of the McKay correspondence. The study in (4) should be generalized in the cases of any algebraic surfaces.

研究分野：代数幾何学

キーワード：導来圏 トーリック多様体 楕円曲面

1. 研究開始当初の背景

代数多様体の導来圏は、McKay (マックイ) 対応などを通して (有限次元) 代数の表現論や、ホモロジカルミラー対称性に絡んでシンプレクティック幾何学や物理学など、非常に多くの分野と深いかかわりを持つ研究対象である。本研究では導来圏を通して、そういった自然科学の多くの事象を統括的に理解することが念頭にある。

2. 研究の目的

代数多様体の導来圏の研究は、非常に研究が盛んな分野で、微分幾何や表現論、物理における超弦理論など様々な分野と関係を持つことが知られている。私はそんな中で、まず高次元代数多様体の分類理論との関わりに興味があり研究してきた。高次元代数多様体の分類理論は 1980 年代から急速に発展し、ある種の 3 次元代数多様体はある良いモデル (極小モデル) と双有理同値であることが示された。このとき得られる極小モデルは唯一ではないが、Kontsevich は、得られた滑らかな極小モデルは互いに同じ導来圏を持つことを予想した。この予想は分類論の観点からも非常に面白いと思われるが、もともとは下で述べるホモロジカルミラー対称性に関係して提唱されたものである。

ミラー対称性は 1990 年初頭に物理学者たちが提唱したカラビヤウ多様体における壮大な予想である。現在では非常に様々な分野とかかわりを持ち、数学や物理学で巨大な分野を形成する。さらに Kontsevich は 1994 年に導来圏の言葉を使ってミラー対称性を圏化したホモロジカルミラー対称性を提唱した。それは与えられた 3 次元カラビヤウ多様体に対し、そのミラーである 3 次元カラビヤウ多様体が存在し、その導来圏と深谷圏に関係があるだろう、というものである。一方 McKay 対応は 1980 年頃、表現論と幾何学の交差する不思議な現象として McKay によっ

て発見された。今では非可換環や導来圏の言葉で深く理解されつつあり、様々な分野とのかかわりを持って非常に活発に研究されている。私は分類論の立場から導来圏を研究し始めたが、そこに自然にあらわれてくるホモロジカルミラー対称性や McKay 対応にも興味を広がってきた。私の研究の目的は、まさにこのホモロジカルミラー対称性や McKay 対応をより深く理解し、記述することにある。

3. 研究の方法

本研究は幅広い知識に基づくもので多くの研究者と交わることが非常に重要であり、具体的には以下のような方法で研究者と交流してきた。

私は研究分担者の戸田幸伸氏 (IPMU) と導来圏、ミラー対称性、McKay 対応に関する長時間 (1 回通常 2 時間半) のセミナー (Derived category, McKay correspondence, Mirror symmetry セミナー (DMM セミナー)) を 2010 年に開始し、これまでに Kavli IPMU (数物連携宇宙機構) で約 60 回実施し、国内外から多くの優秀な数学者を招聘し、特に海外から招聘した数学者には 2 週間ほど日本に滞在してもらってきた。私は分担者の戸田氏と協力して、このセミナーを継続して、この分野の理解を深めてきた。また Kavli IPMU 自体、代数多様体の導来圏の世界的権威とも言える Bondal 氏、戸田氏に加え、原始形式の研究者である齋藤恭司氏、ミラー対称性の研究者である堀健太郎氏がおり、さらに多くの優秀なポスドクと学生を擁し、日本における代数多様体の導来圏の研究における中心地となっている。私は IPMU に頻繁に通うことで、様々な新しい数学に触れ、問題意識を得て研究をしてきた。

また当該研究費を使って、毎年イギリス (エジンバラ大学、ウォリック大学)、フランス (フーリエ研究所)、ドイツ (マックスプランク研究所) やアメリカ (ノースイースタン大学) に渡り、数週間滞在し現地の一流数学者 (Michael Wemyss 氏, Alessandro Chiodo 氏, Emanuele Macri 氏, Daniel Huybrechts 氏など) と交流して知識を得てきて、そこで得られた知識は問題解決に非常に有用であった。

4. 研究成果

以下では○囲みの数字は下記の発表論文を指すこととする。

⑦で私は導来圏が同値であり、ホッジ同型かつ変形同値であるが、互いに双有理同値とならないような 3 次元代数多様体 (特に極小モデル) の例を構成した。これはかつての楕円曲面の導来圏の研究を応用させたもの

で、双有理トリリ問題に関する否定的な回答を与えるものである。双有理な極小モデルは Bridgeland の結果により導来同値であることが知られているので、互いに双有理でないものを構成した、というところが重要である。

⑥では2次元トーリックスタックの導来圏の生成元をフロベニウス写像を用いて構成した。⑤でも同様の方法で3次元トーリックファノ多様体の導来圏の生成元を構成した。ここでは⑥より良い生成元(例外生成系)を、3次元ファノ多様体の分類と双有理幾何を応用することによって見つけてきた。これらの結果は Bondal によって予想されていた事を解決したものである。

②では2次元弱ファノ多様体の例である Hirzebruch 曲面上の例外層の分類を行った。これまででは2次元ファノ多様体 (del Pezzo 曲面とよばれる) ものに対して、例外層の分類は与えられていたが、我々が扱った弱ファノ多様体は(-2)曲線が存在する分、導来圏の自己同値群が増え、問題ははるかに難しくなる。実際、我々の結果は、例外ベクトル束を(-2)曲線によるツイストを行ってすべての例外層が得られる、というもので非常に新しい記述の仕方である。この結果は Hirzebruch 曲面上の例外生成系の研究に適用できると期待している。

さらに①ではかねてから研究してきた楕円曲面の導来圏の研究を応用し、楕円曲面の導来圏の自己同値群の記述を行った。今まではごく一部の曲面の自己同値群しか決定されていなかったが、私の結果により一般の曲面の自己同値群の記述に関してかなり見通しが良くなったと自負している。実際その後の研究で、すべての代数曲面の導来圏の自己同値群は3つのタイプ(K3型、楕円曲面型、一般型)に分けることができることを示すことに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① H. Uehara, Autoequivalences of derived categories of elliptic surfaces with non-zero Kodaira dimension, Algebraic Geometry, (Foundation Compositio Mathematica) に受理済, 査読あり
- ② S. Okawa, H. Uehara, Exceptional sheaves on the Hirzebruch surfaces \mathbb{F}_2 , Int Math Res Notices (2015) Vol. 2015 No. 23. 12781-12803, 査読あり doi: 10.1093/imrn/rnv079
- ③ Y. Toda, Flops and the S-duality conjecture, Duke Math. J. 164, (2015),

2293--2339. 査読あり
doi:10.1215/00127094-3129595

- ④ Y. Toda, S-Duality for surfaces with A_n -type singularities, Math. Ann. 363, (2015), 679--699. 査読あり DOI:10.1007/s00208-015-1184-1
- ⑤ H. Uehara, Exceptional collections on toric Fano threefolds and birational geometry, International Journal of Mathematics 25. (2014), 査読あり <http://dx.doi.org/10.1142/S0129167X1450001>
- ⑥ R. Ohkawa, H. Uehara, Frobenius morphisms and derived categories on 2-dimensional toric Deligne--Mumford stacks, Advances in Mathematics. 244 (2013) 241-267, 査読あり doi:10.1016/j.aim.2013.04.023
- ⑦ H. Uehara, A counterexample of the birational Torelli problem via Fourier--Mukai transforms, J. Algebraic Geom., 21 (2012), 77-96, 査読あり DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S1056-3911-2011-00551-1>
- ⑧ Y. Toda, Stable pairs on local K3 surfaces, J. Differential. Geom. 92, 285-371 (2012). 査読あり <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1352297809>

[学会発表] (計 15 件)

- ① H. Uehara, Autoequivalences of derived categories of elliptic surfaces with non-zero Kodaira dimension, Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces, 2015年10月26日, 京都大学(京都府京都市)
- ② H. Uehara, Exceptional sheaves on the Hirzebruch surfaces \mathbb{F}_2 , Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 1, 2015年9月18日, モスクワ(ロシア)
- ③ H. Uehara, Exceptional sheaves on the Hirzebruch surfaces \mathbb{F}_2 , 代数学セミナー, 2015年1月14日, 広島大学(東広島市)
- ④ H. Uehara, Autoequivalences of derived categories of elliptic surfaces with non-zero Kodaira dimension, Primitive Forms, Mirror Symmetry and Related Topics 2014, 2014年12月26日, 京都大学(京都府京都市)
- ⑤ H. Uehara, Autoequivalences of derived categories of elliptic surfaces with

non-zero Kodaira dimension, Workshop di Geometria Algebraica, 2014年9月18日, イタリア (ミラノ)

- ⑥ Y. Toda, “Derived category of coherent sheaves and counting invariants” 国際数学会議(ICM)招待講演, 2014年8月18日, 韓国(ソウル)
- ⑦ H.Uehara, Exceptional sheaves on the Hirzebruch surfaces \mathbb{F}_2 , Algebraic Geometry seminar, 2014年5月20日, フランス (トゥールーズ)
- ⑧ H.Uehara, Frobenius morphisms and derived categories on 2-dimensional toric Deligne–Mumford stack, 2014年3月20日, 阪大 (大阪府豊中市)
- ⑨ H.Uehara, Exceptional collections on toric Fano threefolds and birational geometry Exceptional collections on toric Fano threefolds and birational geometry, トーリック多様体と特異点の周辺, 2014年1月10日, 東北大学 (宮城県仙台市)
- ⑩ H.Uehara, Frobenius morphisms and derived categories on 2-dimensional toric Deligne–Mumford stack, The Geometry of Topological D-branes, Categories and Applications, 2013年5月16日, オーストリア (ウィーン)
- ⑪ H.Uehara, Exceptional collections on toric Fano threefolds and birational geometry Exceptional collections on toric Fano threefolds and birational geometry, AGTP: School on Algebraic Geometry and Theoretical Physics, 2012年7月13日, イギリス (コベントリー)
- ⑫ H.Uehara, Frobenius morphisms and derived categories on 2-dimensional toric Deligne–Mumford stack, Conference on resolution of singularities and the McKay correspondence, 2012年5月3日, 名古屋大学 (愛知県名古屋市)

[その他]

ホームページ等

“DMM seminar information”

<http://www.comp.tmu.ac.jp/hokuto-home/newpage7.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

上原 北斗 (UEHARA, Hokuto)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：80378546

(2) 研究分担者

戸田 幸伸 (TODA, Yukinobu)

東京大学・国際高等研究所 Kavli 数物連携

宇宙機構・准教授

研究者番号：20503882