

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 1 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23340013

研究課題名(和文) 相対標準束と変形空間の複素幾何学

研究課題名(英文) Complex geometry of relative pluricanonical bundles and deformation spaces

研究代表者

高山 茂晴 (Takayama, Shigeharu)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：20284333

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,600,000円

研究成果の概要(和文)：複素多様体間の全射固有正則写像において、そのファイバーの複素構造の変形の様子と、相対多重標準束およびその順像層に標準的な計量を入れたときのその曲率・変分の性質とを関係付ける研究成果を得た。特にファイバーがカラビ-ヤウ多様体の場合に、ファイバーごとのKähler-Einstein計量の挙動、底空間上のWeil-Petersson計量の完備性、中心ファイバーの特異点の様子を関係付けて完全に記述した。

研究成果の概要(英文)：For a proper surjective morphism between complex manifolds, we obtain results to connect the deformation of complex structures of fibers and the curvature property or variations of the relative pluricanonical bundle and its direct image equipped with canonically attached Hermitian metrics. In particular, when the fibers are Calabi-Yau type, we describe completely the relations among the behavior of fiberwise Kähler-Einstein metrics, the completeness of the Weil-Petersson metric on the base, and the possible type of singularities on the central fiber.

研究分野：複素幾何学

キーワード：相対標準束 モジュライ空間 変形空間

1. 研究開始当初の背景

リーマン面のモジュライ空間は、様々な設定で多様体の構造の変形理論として高次元化されている。代数幾何においては、 Viehweg は 1990 年代前半に、射 $f: X \rightarrow Y$ に対し、そのファイバーが一般型や極小などの場合にモジュライ空間の存在を示し、そして様々な場合にモジュライ空間がよい性質を持つことを示した。また基本的な予想もいくつか提出している。藤田、川又、 Viehweg、 Kollar らによるこの方面の基本定理として、順像層 $f_*(mK_{X/Y})$ の正値性がある。これは Hodge 理論を通して代数的に定式化、証明されたものであるが、高山-Mourougane は、 Kahler 幾何の設定で $f_*(K_{X/Y} \otimes E)$ 、 E は適当な正値性をもつベクトル束、という形で定式化し、正値性も標準的な計量を構成し、その曲率が正ということで証明した。

一方、微分幾何学においては、 Schumacher はファイバー $X \rightarrow Y$ が負曲率 Kahler-Einstein 計量をもつ場合に、 $K_{X/Y}$ には自然な曲率が半正のエルミート計量が入ることを示し、高次順像層 $R^{n-p}f_*(\omega_{X/Y}^p \otimes K_{X/Y})$ の曲率を計算している。しかし公式があるだけで正値性は言えていなく、応用にはまだ不十分である。また Hitchin の研究を発展させた、後藤による種々の幾何構造の変形理論もある。複素構造を一旦はずして変形することで別の構造が見えてくる、という新しい理論であった。

2. 研究の目的

高次元複素多様体のモジュライ空間の複素幾何学的な側面からの理論の構築を目指す。 $f: X \rightarrow Y$ を複素多様体間の全射固有正則写像で、代数的又は Kahler 的とし、一般ファイバーの次元を n 、 Y の次元を d とする。研究目的は一般ファイバーが (i) 一般型多様体または負曲率 Kahler-Einstein 計量を許容する場合、 (ii) カラビヤウ型が多様体である場合に、 Y 又はモジュライ空間は適当な意味で負曲率であることを示すことにある。より具体的には、 (i) の場合は順像層 $f_*(mK_{X/Y})$ や $R^{n-p}f_*(\omega_{X/Y}^{p+d} \otimes K_{X/Y})$ に標準的な計量を入れ、その曲率の正値性、 Y の無限遠付近での正値性の退化の様子を、 (ii) の場合には $f_*K_{X/Y}$ の L^2 計量の曲率形式の無限遠での振る舞いを調べることにある。

3. 研究の方法

(1) 本研究は代数幾何、複素幾何、多変数複素解析等の多岐の分野にわたる視点を必要とするため、広範囲の他の研究者グループとの活発な議論、最新情報の交換等を行う必要があった。連携研究者とはメール等により情報交換をし、主に国内で行われる研究集会などの際に研究打ち合わせを行った。さらに海外の研究者 G. Heier 氏 (アメリカ、 Houston 大学)、 M. Paun 氏 (韓国高等研究所)

と、それぞれガウス写像の次数のエフェクティブな評価に関する共同研究、相対多重標準束およびその順像層の正値性に関する共同研究を行った。

(2) 幾つかの研究集会を主催し、国際的な研究交流などを促進した。

「Tokyo-Seoul Conference in Mathematics - Complex Geometry -」、於 東京大学、2011 年 12 月。海外から W.-K. To 氏 (シンガポール) らを招聘し、モジュライ空間の負曲率性に関して議論した。

「Higher Dimensional Algebraic Geometry」、於 東京大学、2013 年 1 月。川又教授 (東大数理) の還暦を祝う研究集会として参加者 200 名規模で開催した。国内外の一流の研究者らを多数招聘した。

「複素幾何シンポジウム」、於 金沢大学サテライトプラザ、2015 年 10 月。20 年前から毎年開催されている集會にこの年から主催者として加わった。Kahler-Einstein 計量、複素代数幾何などが主なテーマである。

「多変数複素解析葉山シンポジウム」、於 湘南国際村センター、神奈川県葉山町、2011、2013、2014 年 7 月。

Workshop on 「L2 extension theorems」、於 東京大学、2016 年 2 月。近年大きく発展した大沢-竹腰の L^2 拡張定理に関して、海外から Blocki、Paun、Varolin、Zhou らを招聘し最新の研究について議論した。

4. 研究成果

以下では一般に X, Y を複素多様体とし、 $f: X \rightarrow Y$ をその間の全射固有正則写像とする。しばしば f は射影的であることを要請する。このとき滑らかな一般ファイバー $X_y = f^{-1}(y)$ の変形の様子、 f の退化の様子、相対多重標準束 $mK_{X/Y}$ の微分幾何的性質を互いに関係付けながら研究を行った。具体的な研究成果は以下の通りである。

(1) 写像 f は Y の解析的部分集合 D の補集合上 f は滑らか、 X 上のエルミート正則ベクトル束 (E, h) で、その曲率形式が中野の意味で半正であり、さらに $f^{-1}(W)$ 、 W は Y の開集合、という形の開集合上で正であるものを考える。すると、 掬じれ自由層 $f_*(K_{X/Y} \otimes E)$ は各点 $y \in Y - D$ において中山の意味で局所アンプルになり、特に巨大層になる。この定理はこれまでに知られていた Viehweg や竹腰らによる正値性定理の局所的な性質に関する精密化とみなすことができる。

その証明には、より一般の複素多様体 Y 上の掬じれ自由層 F に対して、与えられた点における F の中山の意味での局所弱正性や局所アンプル性の条件を、 F に付随した射影束 $P(F)$ の普遍直線束 $\mathcal{O}(1)$ に幾何的状況に応じて定まる、適切な特異エルミート計量の性質で記述する判定法を与えることでなされた。

これは F が直線束 L のときでさえ、与えられた点において局所アンプル性を判定するという点において新しい判定法になっている。この研究成果を論文としてまとめ雑誌 Bulletin des Sciences Mathematiques に発表した。

(2) 写像 f は Y の開集合 Y_0 上で滑らかとし、 f の一般ファイバー X_y の小平次元 (X_y) は半正とする。このとき相対多重標準束 $mK_{X/Y}$ に標準的に、Bergman 計量と同様な構成で得られる、標準的に定まる特異エルミート計量 h_m を構成することができる。そしてさらに順像層 $f_*(mK_{X/Y})$ には h_m に付随して定まる Narasimhan-Simha 計量と呼ばれる標準的な特異エルミート計量 g_m を入れことができる。これら h_m, g_m がともに半正な曲率をもつことを示した。一般には順像層 $f_*(mK_{X/Y})$ は局所自明層とは限らず、その特異エルミート計量 g_m についても、その定義も含め議論が必要である。この部分は上述(1)の研究が生かされ、基本的な性質を整理するのに時間が節約できた。これらは M. Paun 氏 (韓国高等研究所) との共同研究であり、論文としてまとめ学術雑誌に投稿中である。

さらに h_m, g_m の滑らかさ等について研究した。まず、 Y は単位円板とし、原点 $0 \notin Y$ 以外ではそのファイバー X_t は滑らかであるとす。ただし原点のファイバー X_0 は特異点を許すものとする。このときに g_m の $0 \notin Y$ の近くでの漸近挙動を研究した。写像 f の X_0 での特異性を表す代数幾何的に定義される数値として、次の log-canonical threshold (lct) がある。

$$r_0 = \text{lct}(X, rX_0)$$

$= \{r > 0; \text{組}(X, rX_0) \text{ はログ標準的} \}$ 。

これを用いて g_m の特異性の上からの評価を得た。各 $m > 0$ と各正則切断 $u \in H^0(Y, f_*(mK_{X/Y}))$ に対して、 $t \rightarrow 0$ のとき、 $g_m(u, u)(t)$

$$< C (|t|^{\{-2(1-r_0)\}} (-\log |t|)^n)^m$$

を示した。特に組 (X, X_0) がログ標準的のときには $r_0 = 1$ であり、 $g_m(u, u)(t)$ は高々対数的な発散 $(-\log |t|)^{\{nm\}}$ になることが得られる。底空間 Y が一般次元でも適当な仮定の下で、 $\dim Y = 1$ の場合の結果が応用できる場合がある。例えば藤野氏 (京大) の結果、順像層 $f_*(mK_{X/Y})$ の数値的半正性に関する定理のある精密化を得ることができた。論文としてまとめ雑誌 Ann. Inst. Fourier に発表した。

(3) ここでは Y は単位円板 (または曲線) とし、相対アンプルな X 上の直線束 L が与えられているとする。さらに原点 $0 \notin Y$ 以外ではそのファイバー X_t は滑らかで、標準束 K_{X_t} は自明であるとする。ただし原点のファイバー X_0 は特異点を許すものとする。このときに以下の三つの性質に注目をする

ことは基本的である。

- (i) 滑らかなファイバー X_t のリッチ平坦な Kaehler-Einstein 計量 g_t (そのコホモロジー類は L_t に属する) の $t \rightarrow 0$ のときの振る舞い。
- (ii) $Y \dashrightarrow 0$ に定義される Weil-Petersson 擬距離の完備性。
- (iii) 特異ファイバー X_0 としてはどのようなタイプのものが可能か?

この種の問題意識は小平の楕円曲面の研究に端を発している。より近年では 1990 年代後半に Wang が一般次元での研究を開始し、最近では Tosatti がその研究を進展させている。背景には、近年の代数幾何における極小モデル理論の発展や、Donaldson-Sun, Tian らによる特殊ケーラー計量の存在問題に関する研究の発展がある。ここでの研究はこの一連の研究に最終的な解答を与えるものである。すなわち適切な設定の下で、以下の三つが同値であることを示した。

- (i) 滑らかなファイバー (X_t, g_t) の直径は t に関して一様有界である。
- (ii) $Y \dashrightarrow 0$ 上の Weil-Petersson 擬距離は完備ではない。
- (iii) 特異ファイバー X_0 と高々標準特異点しかもたない。

(4) 一方で、写像 $f: X \rightarrow Y$ の特異ファイバーの複雑さを調べるために、射影空間 P^N 内に埋め込まれた一般に特異点をもつ部分多様体 Z の一般ガウス写像の研究を行った。 Z の各点の接平面を含む超平面を考えると、 Z から適当なグラスマン多様体 G への写像、一般ガウス写像が得られる。その像の G 内のプリュッカー次数の次元 $\dim Z$, 次数 $\deg Z$, N によるエフェクティブな評価を与えた。これは古典的な Castelnuovo の定理の一般化とみなせる。この研究はアメリカ Huston 大学の G. Heier 氏との共同研究であり、論文としてまとめて雑誌に投稿し受理された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Takayama S., Singularities of Narasimhan-Simha type metrics on direct images of relative pluricanonical bundles, Ann. Inst. Fourier, 66 (2016) 753--783. 査読有. DOI: 10.5802/aif.3025

Takayama S., On moderate degenerations of polarized Ricci-flat Kahler manifolds, Kodaira Centennial issue of J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 22 (2015) 469--489. 査読有. <http://hdl.handle.net/2261/59276>
Heier G. and Takayama S., Effective

degree bounds for generalized Gauss map images, to appear in a volume of Advanced Studies in Pure Math., Math. Soc. Japan. 査読有.

Takayama S., A local ampleness criterion of torsion free sheaves, Bull. Sci. math. 137 (2013) 659--670. 査読有.

DOI: 10.1016/j.bulsci.2013.01.001

Pacienza G. and Takayama S., On volumes along subvarieties of line bundles with non-negative Kodaira-Iitaka dimension, Michigan Math. J. 60 (2011) 35--49. 査読有.

DOI:10.1307/mmj/1301586302

〔学会発表〕(計 11 件)

高山 茂晴; Degeneration of algebraic varieties and the metric completeness of parameter spaces, 第21回複素幾何シンポジウム, 2015年10月, 金沢大学サテライトプラザ(石川県金沢市).

高山 茂晴; On moderate degenerations of polarized Ricci-flat Kahler manifolds, Princeton-Tokyo workshop on Geometric Analysis, 2015年3月, 東京大学(東京都目黒区).

高山 茂晴; Degenerations of polarized Ricci-flat Kahler manifolds, Komplexe Analysis, 2014年8月, Oberwolfach (Germany).

高山 茂晴; On moderate degenerations of polarized Ricci-flat Kahler manifolds, HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XVII, 2014年7月, 湘南国際村センター(神奈川県葉山町).

高山 茂晴; An effective birationality of pluricanonical maps for a family of canonically polarized manifolds over a curve, 代数幾何学城崎シンポジウム, 2013年10月, 城崎大会議館(京都府豊岡市).

高山 茂晴; An effective birationality of pluricanonical maps for a family of canonically polarized manifolds over a curve, Complex Geometry Conference in honor of Professor Y.-T. Siu's 70th, 2013年5月, ソウル市(韓国).

高山 茂晴; On complex geometry of pluricanonical and adjoint bundles, 第8回代数・解析・幾何セミナー, 2013年2月, 鹿児島大学(鹿児島県鹿児島市).

高山 茂晴; Effective estimate on the number of deformation types of families of canonically polarized manifolds over curves, 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学, 2012年3月, 九州大学(福岡県福岡市).

高山 茂晴; Effective estimate on the number of deformation types of families of canonically polarized manifolds over curves, Algebraic Geometry in East Asia, 2011年11月, 台北市(台湾).

高山 茂晴; Metric positivity of higher direct images of twisted sheaves of differential forms, RIMS 共同研究「ポテンシャル論とファイバー空間」, 2011年9月, 京都大学(京都府京都市).

高山 茂晴; On higher direct images of twisted sheaves of differential forms, 6th Pacific RIM conference, 2011年8月, 慶州市(韓国).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/takayama.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高山 茂晴 (TAKAYAMA, Shigeharu)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 20284333

(2) 研究分担者; なし

(3) 連携研究者

二木 昭人 (FUTAKI, Akito)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 90143247

後藤 竜司 (GOTO, Ryushi)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 30252571

大沢 健夫 (OHSAWA, Takeo)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 30115802

小櫃 邦夫 (OBITSU, Kunio)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号: 00325763

山ノ井 克俊 (YAMANOI, Katsutoshi)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 40335295

藤野 修 (FUJINO, Osamu)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 60324711

林本 厚志 (HAYASHIMOTO, Atsushi)

国立長野高専・一般科・准教授

研究者番号: 90342493