

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 13 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23340018

研究課題名(和文)量子微分幾何学の構築

研究課題名(英文) Perspectives for Quantum Differential Geometry

研究代表者

前田 吉昭 (Maeda, Yoshiaki)

東北大学・知の創出センター・特任教授(研究)

研究者番号：40101076

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,700,000円

研究成果の概要(和文)：数論、代数幾何学、微分幾何学、トポロジー、それに数理物理、素粒子論を中心として、非可換な対象物を扱い、新しい幾何学の流れを構築することを目標に置いている。本研究の特徴は、基軸となる研究である変形量子化問題と非可換幾何学を推進し、これによる微分幾何学の非可換化(量子化)手法を確立させ、それを発展させるというまったく新しい立場からの研究を行うことにある。特に、Non-formal deformation quantizationの手法を用いて、数学および素粒子物理学との融合研究を進め、この分野の国際的なネットワークを構築することを目的としている。

研究成果の概要(英文)：The aim is to study the non-commutative objects in Number theory, algebraic geometry, differential geometry, topology and mathematical physics including particle physics and to propose new idea in geometry. The features of this study is to hire the theory of deformation quantization and non-commutative geometry and develop them to apply several research topics. In particluar, we construct a new method of non-formal deformation quantization to cooperate with theoretical physics, including particle physics and string theory. We also establish an international research network in this research area.

研究分野：微分幾何学

キーワード：非可換幾何学 変形量子化 シンプレクティック幾何学 岩沢理論 非可換多様体 離散幾何学 T-双対性 一般幾何学

## 1. 研究開始当初の背景

幾何学研究分野の新しい方向の一つは、素粒子物理学をバックグラウンドにした「幾何学の量子化」の問題である。実際、共形場・位相場理論、カテゴリー論、非可換ゲージ理論、超弦理論等、幾何学および物理学においてその兆候が表れていると考えられるが、統一した考え方や方法論が確立しているわけではない。本研究は、この新しい研究の流れに向かって、量子微分幾何学の構築とその展開を行い、幾何学および理論物理学への貢献を目指すものである。本研究の特徴は、基軸となる研究である変形量子化問題と非可換幾何学を推進し、これによる微分幾何学の非可換化(量子化)を確立させ、それを発展させるという全く新しい立場からの研究を行うことである。

変形量子化問題は、量子化を純代数的に把握する概念として、Flato, Lichnerowicz 他(Deformation theory and quantizations, I, II, Ann. Phys. 111, 1987) によって提案、シンプレクティック多様体の微分可能な関数環(ポアソン環)の代数的な変形問題である。基本となる問題は、与えられたシンプレクティック多様体の変形量子化の存在と同値性であったが、これは研究代表者とその研究グループ(Y. Maeda, et al, Weyl manifolds and deformation quantization, Adv. Math. 85(1991), 224-255)、Lecomte-W. Dewlde, Fedosov によって解決された。その構成の鍵となるのは、Weyl 代数をもとにした「非可換多様体」が背後にあり、これが本研究を進める重要なよりどころとなるものである。その後、Kontsevich (Deformation quantization of Poisson manifolds, Lett. Math. Phys. 66(2003), 157-216) により、一般のポアソン多様体へ拡張され、その存在問題と同値性についての解決が得られ、変形量子化の研究が大きく前進している。ここでは、次数つき微分代数と quasi-isomorphism の概念が提案され、グループポイド、オペラド理論や圏論(A 圏、導来圏)として代数的位相幾何学および高次構造の研究への発展として貢献している。変形量子化問題のもう一つの主問題は、収束問題である。この研究は2つの方向があり、作用素環によるアプローチでは、Rieffel の非可換トラスや Wornowich の量子群の研究等がある。この考え方は、厳密量子化問題として、作用素環の立場から非可換多様体の研究が進められている。特に、現在重要な問題となっている指数定理の非可換幾何学的アプローチは、この厳密量子化と K 理論を非可換幾何学から見直すものであり、本研究グループの夏目・森吉、Tsygan-Nest 等により行われ、夏目・森吉は特異空間および境界のある多様体の指数定理について非可換幾何学の立場からのアプローチを進めている。一方で、表現論や幾何学的量子化問題では、

古典力学に沿った「量子化手法」をもとに幾何学的なヒルベルト空間の上の作用素の構成を行うものであり、Gillemin-Sternberg, Boutet de Monvel, Unterberger 等が進めた擬微分作用素やフーリエ積分作用素の理論を用いた解析的な手法である。この手法とともに Berezin の量子化手法(coherent state による量子化)をもとにして、非可換積を積分表示として求める普遍量子化問題(Universal deformation quantization)の研究も本グループで進められている。本研究代表者とベルギールーバン大学の P. Bieliavsky は、 $ax+b$  群等の群作用を用いた量子化問題から対称空間や等質空間の量子化等の研究を推進し、非可換対称空間の構成へ向かっている。変形量子化問題では、複素領域や幾何構造の量子化問題である。複素シンプレクティック多様体についての変形量子化問題は、Boutet de Monvel, Schapira, Dito 等の研究がある。フーリエ積分作用素および代数解析の立場から、複素シンプレクティック多様体の変形量子化問題の研究を進め、D 加群、スタックの概念、\* 指数関数の構成や指数定理の代数解析的アプローチを行っている。Kontsevich は代数幾何学の立場から代数多様体の変形量子化問題(nonformal deformation)の研究を行っている。これらの研究では、収束性は議論していない形式的変形量子化の立場である。研究代表者および研究分担者である大森他により、複素 Weyl 代数に基づく収束変形量子化問題が進められ、\* 指数関数の構成等が行われている。本研究での典型的な問題は、2 次の指数関数が生成する複素メタプレクティック群(このような群は存在しないが)群もどきの対象物の構成である。マスロフジャープ等、今までの幾何学には現れなかった豊富な幾何学的対象物も出現している。

## 2. 研究の目的

変形量子化問題は、量子化を純代数的に把握する概念として、Flato, Lichnerowicz 他(Deformation theory and quantizations, I, II, Ann. Phys. 111, 1987) によって提案、シンプレクティック多様体の微分可能な関数環(ポアソン環)の代数的な変形問題である。基本となる問題は、与えられたシンプレクティック多様体の変形量子化の存在と同値性であったが、これは研究代表者とその研究グループ(Y. Maeda, et al, Weyl manifolds and deformation quantization, Adv. Math. 85(1991), 224-255)、Lecomte-W. Dewlde, Fedosov によって解決された。その構成の鍵となるのは、Weyl 代数をもとにした「非可換多様体」が背後にあり、これが本研究を進める重要なよりどころとなるものである。その後、Kontsevich (Deformation quantization of Poisson manifolds, Lett. Math. Phys.

66(2003), 157-216)により、一般のポアソン多様体へ拡張され、その存在問題と同値性についての解決が得られ、変形量子化の研究が大きく前進している。ここでは、次数つき微分代数と quasi-isomorphism の概念が提案され、グループポイド、オペラド理論や圏論(A 圏、導来圏)として代数的位相幾何学および高次構造の研究への発展として貢献している。変形量子化問題のもう一つの主要問題は、収束問題である。この研究は2つの方向があり、作用素環によるアプローチでは、Rieffel の非可換トラスや Wornowich の量子群の研究等がある。この考え方は、厳密量子化問題として、作用素環の立場から非可換多様体の研究が進められている。特に、現在重要な問題となっている指数定理の非可換幾何学的アプローチは、この厳密量子化と K 理論を非可換幾何学から見直すものであり、本研究グループの夏目・森吉、Tsygan-Nest 等により行われ、夏目・森吉は特異空間および境界のある多様体の指数定理について非可換幾何学の立場からのアプローチを進めている。一方で、表現論や幾何学的量子化問題では、古典力学に沿った「量子化手法」をもとに幾何学的なヒルベルト空間の上の作用素の構成を行うものであり、Gillemin-Sternberg, Boutet de Monvel, Unterberger 等が進めた擬微分作用素やフーリエ積分作用素の理論を用いた解析的な手法である。この手法とともに Berezin の量子化手法(coherent state による量子化)をもとにして、非可換積を積分表示として求める普遍量子化問題(Universal deformation quantization)の研究も本グループで進められている。本研究代表者とベルギールーバン大学の P. Bieliavsky は、 $ax+b$  群等の群作用を用いた量子化問題から対称空間や等質空間の量子化等の研究を推進し、非可換対称空間の構成へ向かっている。変形量子化問題では、複素領域や幾何構造の量子化問題である。複素シンプレクティック多様体についての変形量子化問題は、Boutet de Monvel, Schapira, Dito 等の研究がある。フーリエ積分作用素および代数解析の立場から、複素シンプレクティック多様体の変形量子化問題の研究を進め、D 加群、スタックの概念、\* 指数関数の構成や指数定理の代数解析的アプローチを行っている。Kontsvich は代数幾何学の立場から代数多

### 3. 研究の方法

Non-formal deformation quantization の手法を用いた、非可換幾何学への応用として、複素シンプレクティック多様体の収束変形量子化問題と非可換多様体の構成、Non-formal UDF による葉層構造の応用、K-理論と指数定理の非可換幾何学的アプローチ、代数的ホモロジー論や圏論による高次構造(higher structure)、ディラック構造

や一般幾何学(generalized geometry)の量子化問題とその応用、変形量子化問題による数論への応用、T-対称性、量子場の理論、非結合多様体の具体的構成について、統合的な理解を行う。さらに、それを数論、代数解析、複素シンプレクティック幾何学・複素ポアソン幾何学の量子化、カテゴリー論・代数位相幾何学等の数学研究分野および場の量子論や超弦理論等の理論物理研究分野を含む様々な問題へ応用する。

### 4. 研究成果

A) 変形量子化問題の研究 本研究では、変形量子化を数論、量子可積分系、超弦理論、場の量子論といった物理等への応用を目指すために、変形量子化問題を形式的な対象のみならず、収束性の考察を行う。作用素環でのねじれ接合積を用いた高次元の非可換球面の構成、Calabi-Yau 多様体や代数多様体、Sasaki-Einstein 多様体や接触多様体の非可換化、ツイスター理論の非可換化とゲージ理論の非可換化の研究を進めた。

B) 厳密変形量子化問題と非可換幾何学 普遍変形公式 Universal deformation formulae, (UDF)を発展させ、量子群に対する厳密 Drinfel'd ツイストの公式を厳密量子化による UDF 公式から求める。これより、非可換対称空間、特に非可換ジューゲル領域の構成や非コンパクトリーマン面の non-formal な非可換化等へのアプローチを進める。特異多様体の指数定理の厳密変形量子化を用いた非可換幾何学の手法により行った。

C) 変形量子化問題の双曲幾何学および数論へのアプローチ 変形量子化と非可換幾何学の研究者と双曲幾何学および数論への応用についての連携研究を行うための基盤整備を行う。岩澤理論や L-関数についての研究討論を行い、それらの p-進体への拡張問題を含めた非可換化への有効性について議論を進めていく。離散化されたシステムや離散群の作用の剛性等の研究をもとに、離散群作用に付随する非可換幾何学の構成を行った。

D) 変形量子化問題と可積分系・代数幾何学 旗多様体の上の量子積分可能系、量子コホモロジー、フロベニウス多様体、 $tt^*$  構造について、シンプレクティック幾何学や特異点論とのつながりや応用について研究する。Gromov-Witten 量と KdV ヒエラルキーの解を関連付け、一般化する。また、量子コホモロジーの汎関数的性質や可積分系における D-加群の役割について変形量子化の立場から理解する。A 圏等に関する一般論とその関係についての研究を非可換解析(無限次元リー環)の立場から行う。広義カラビ-ヤウ多様体と 4 次元ゲージ理論の問題について本研究グループに提案した。

E) 素粒子物理との連携研究 T-双対性の

立場からミラー対称性についてのアプローチを行った。一般幾何学や四元数多様体の T - 双対性についての考察を行った。

上記の研究を推進するために、1) 研究代表者、研究分担者および連携研究者との定期的な研究討論、2) 国内外関連研究者や研究グループとの研究会の開催、3) 国内外学会等での発表、4) 研究のスタートのために、研究資料や研究ネットワークの構築等研究環境の整備、5) アジアの研究者や若手研究者の本研究への参加の促進、を実施し、多くの成果論文や本を出版している。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 24 件)

1. M. Kurihara, Tate sequences and Fitting ideals of Iwasawa modules, Cornelius Greither and Masato Kurihara, to appear in Algebra i Analiz (St. Petersburg Math Journal), 2016. (査読付)
2. C. Greither and M. Kurihara, Fitting ideals of Iwasawa modules and of the dual of class groups, to appear in Tokyo Journal of Mathematics, 2016. (査読付)
3. M. Kurihara, On zeta elements for  $G_m$ , David Burns, Masato Kurihara and Takamichi Sano, to appear in Documenta Mathematica, 2016. (査読付)
4. Y. Maeda, S. Rosenberg, F. Torres-Ardila, The geometry of loop spaces II: characteristic classes. Adv. Math. 287(2016), 485-518. (査読付)
5. Y. Maeda, S. Rosenberg, Traces and characteristic classes in infinite dimensions. Geometry and analysis on manifolds, Progr. Math., 308(2015), 413-435. (査読付)
6. Y. Maeda, S. Rosenberg, F. Torres-Ardila, The geometry of loop spaces I: Hs-Riemannian metrics, Internat. J. Math. 26(2015), 26 pp. (査読付)
7. A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Gauge theories on noncommutative  $CP^N$  and BPS-like equations", Journal of Mathematical Physics 56 (2015) 113506, 1-12 (査読付)
8. Y. Maeda, A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Deformation Quantization with Separation of Variables and Gauge

Theories", Geometric Methods in Physics. XXXIII Workshop 2014, Trends in Mathematics, (2015)135-144 (査読付)

9. Y. Maeda, A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Gauge theories on

noncommutative Kähler manifolds", Journal of Physics: Conference Series 626 (2015) 012045, 1-9 (査読付)

10. T. Sasakawa, H. Muraki, S. Watamura, Gravity theory on Poisson manifold with  $R$ -flux, [arXiv:1508.05706] Fortsch. Phys. 63 (2015) 683-704. (査読付)

11. T. Asakawa, H. Muraki, S. Watamura, Topological T-duality via Lie algebroids and Q-flux in Poisson-generalized geometry

[arXiv:1503.05720] Int. J. Mod. Phys. A30 (2015) 30, 1550182. (査読付)

12. T. Asakawa, H. Muraki, S. Sasa, S. Watamura, Poisson-generalized geometry and R-flux

[arXiv:1408.2649] Int. J. Mod. Phys. A 30 (2015) 1550097 (査読付)

13. Y. Maeda, A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, Hiroshi, Gauge theories in noncommutative homogeneous Kähler manifolds, J. Math. Phys. 55(2014), no. 9, 17 pp. (査読付)

14. H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, Deformation of expressions for elements of an algebra, Symplectic, Poisson, and noncommutative geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 62, (2014) 171-209. (査読付)

15. A. Larraín-Hubach, Y. Maeda, S. Rosenberg, F. Torres-Ardila, Equivariant, string and leading order characteristic classes associated to fibrations, J. Geom. Phys. 79(2014)34-52. (査読付)

16. Y. Maeda, A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Gauge Theories in Noncommutative Homogeneous Kähler Manifolds", Journal of Mathematical Physics 55, 092301 (2014) 1-17 (査読付)

17. 佐古彰史 "非可換幾何学の考え方" 数理科学 3月号 サイエンス社 2014年 34-39. (査読無)

18. A. Sako, "What Happen to Gauge

- Theories under Noncommutative Deformation? ”, Noncommutative Geometry and Physics, 3 (2013) 111-129 (査読付)
19. Y. Maeda, A. Sako, ” Deformation Quantization of Gauge Theory in  $R^d$  and  $U(1)$  Instanton Problems ”, Noncommutative Geometry and Physics 3 (2013) 471-483 (査読付)
20. A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, ” Noncommutative  $CP^N$  and  $CH^N$  and their physics ”, Journal of Physics: Conference Series 442 (2013) 012052 (査読付)
21. A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, ” Noncommutative Deformations of  $CP^N$  and  $CH^N$  ”, Proceedings of the 7th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, (2013) 305-320 (査読付)
22. Y. Maeda, A. Sako, “ Noncommutative Deformation of Spinor Zero Mode and Atiyah-Drinfeld-Hitchin- Manin Construction ”, Journal of Mathematical Physics vol.53, 022303 (2012) 022303-1-24 (査読付)
23. A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, ” Explicit Formulas for Noncommutative Deformations of  $CP^N$  and  $CH^N$  ”, Journal of Mathematical Physics vol.53, 073502 (2012) 073502-1-16 (査読付)
24. Y. Maeda, A. Sako, “ Deformation Quantization of Instantons on  $R^d$  ”, Contemporary Mathematics 584 (2012) 39-63 (査読付)  
〔学会発表〕(計 23 件)
1. 佐古彰史, “ Topological Field Theories and Gauged WZW model 1 ”, “ Topological Field Theories and Gauged WZW model 2 ” Koriyama Geometry and Physics Days 2016 "Painleve equations, integrable systems and moduli spaces". 第一回: Geometry and integrable systems around the fusion algebra, (招待講演)(国際会議)2016年2月7, 8日, 日本大学(福島県郡山市)
2. Y. Maeda, Non-formal star exponentials on contracted one sheet hyperboloid, Conference on Geometry, Topology and Physics, (招待講演)(国際会議), December 26-29, 2015, National Center for Theoretical Science, Hsinchu(Taiwan).
3. A. Sako, “ Fock representation of noncommutative Kahler manifolds and field theories ” International Conference on Non-commutative Geometry and K-Theory, (招待講演)(国際会議)2015年12月19日, 重慶(中国)
4. 井関裕康 「離散群のポアソン境界と剛性」, 福岡大学微分幾何研究会, 2015年11月1日. 福岡大学セミナーハウス(福岡県福岡市)
5. 佐古彰史 “ 非可換幾何学入門 ~ 数学的表現と現実の時空 ~ ”, 科学基礎論夏のセミナー2015, (招待講演), 2015年9月23日, 北海道大学(北海道札幌市)
6. 浅川嗣彦, 村木久祥(発表), 綿村哲, 一般化幾何学に基づく重力理論の構成に関する研究, 日本物理学会2015年秋季大会, 2015年9月28日, 大阪市立大学(大阪府大阪市).
7. 浅川嗣彦(発表), 村木久祥, 綿村哲, 一般化幾何学における非幾何学的フラックスとそのT双対性について, 日本物理学会2015年秋季大会, 2015年9月26日 大阪市立大学(大阪府大阪市).
8. Y. Maeda, Geometry of loop spaces, Workshop in Differential Geometry, (招待講演)(国際会議)September 17-19, 2015, ULB(Belgium)
9. M. Kurihara, Iwasawa theory and p-adic L-functions, Boston Keio summer workshop 2015, Boston Keio University, (招待講演)(国際会議) September 8, 2015. Boston University, Boston(USA).
10. A. Sako, 講演 1 "Introduction to Noncommutative Geometry" 講演 2 "Noncommutative Gauge Theories on  $CP^N$ ", Theoretical Particle Physics Group Seminar in Hokkaido University, (招待講演)2015年6月26日, 北海道大学(北海道札幌市).
11. M. Kurihara, Zeta elements and Iwasawa theory, Local Arithmetic Geometry, Euler Institute, May 21, 2015, St Petersburg(Russia).
12. 佐古彰史, 鈴木俊哉, 梅津裕志: “ 非可換等質ケーラー多様体上のゲージ理論の性質 ”, 日本数学会 2015年度年会 2015年3月23日, 明治大学(東京都)
13. A. Sako, “ Some physics of noncommutative gauge theories on Kahler manifolds ”, Workshop on Strings,

Membranes and Topological Field Theory (TFC Program 2015: Fundamental Problems in Quantum Physics: Strings, Black Holes and Quantum Information), (招待講演)(国際会議) Tohoku University, 2015年3月7日, Tohoku University, (宮城県仙台市)

14. A. Sako, "Gauge theory in noncommutative Kahler manifolds", Seventh International Workshop DICE2014, 2014年9月17日, Castello Pasquini / Castiglione (Italy)

15. Y. Maeda, Wodzicki-Chern-Simons classes for loop spaces, Colloquium at Tohoku University, (招待講演) July 7, 2014. 東北大学 (宮城県仙台市)

16. A. Sako "Deformation Quantization of Gauge theories with Separation of Variables", XXXIII Workshop on Geometric Methods in Physics, 2014年7月3日, Bialowieza (Poland)

17. 佐古彰史, "等質ケーラー多様体上のゲージ理論の変形量子化", 非可換幾何湯谷研究集会, 2013年11月27日, 湯の風HAZU (愛知県新城市)

18. Y. Maeda, Star representations of  $SL(2, R)$ , Trends in Geometry, Analysis and Algebra, (招待講演)(国際会議) July 22-26, 2013, EPFL, Lausanne (Switzerland)

19. 佐古彰史, "幾何学の量子化のいくつかの話題", 神楽坂幾何セミナー, 2013年4月20日, 東京理科大学 (東京都)

20. 佐古彰史 "Noncommutative  $CP^N$  and  $CH^N$  and their physics", Sixth International Workshop DICE2012, (招待講演)(国際会議) 2012年9月19日 Castello Pasquini / Castiglione (Italy)

21. 佐古彰史, 鈴木俊哉, 梅津裕志: "  $CP^N$  と  $CH^N$  の変形量子化 " 日本数学会 2012年度年会, 2012年3月28日, 東京理科大学 (東京都)

22. 佐古彰史 " 超対称ゲージ理論の非摂動的効果とその関連幾何学への入門 " 近畿大学集中講義, 2011年8月24日~26日, 近畿大学 (大阪府大阪市)

23. A. Sako, "Part1: Deformation quantization of  $U(N)$  Instantons in  $R^4$ ", "Part2: Deformation quantization of vortices in Kahler manifolds" Mathématique séminaires Liege University (招待講演) 2011年8月8日, Liege (Belgium)

[図書](計3件)

1. T. Ochiai, T. Mabuchi, Y. Maeda, J. Noguchi, A. Weinstein, Geometry and

Analysis on Manifolds, Progress in Mathematics, Birkhauser, 2015, 480ページ.

2. T. Eguchi, Y. Eliashberg, Y. Maeda, Symplectic, Poisson, and Noncommutative Geometry, MSRI Publications, 62, 2014, 290ページ.

3. 前田吉昭 佐古彰史:「幾何学の量子化」(サイエンス社 SGCライブラリ 95 2012年)全228p

[産業財産権]  
出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:  
取得状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:  
[その他]  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

前田 吉昭 (Maeda, Yoshiaki) (東北大学知の創出センター・特任教授)

研究者番号: 40101076

(2) 研究分担者

森吉 仁志 (Moriyoshi, Hitoshi) (名古屋大学多元数理研究科・教授)

研究者番号: 00239708

佐古 彰史 (Sako, Akifumi) (東京理科大学理学部・准教授)

研究者番号: 00424200

栗原 将人 (Kurihara, Masato) (慶應義塾大学理工学部・教授)

研究者番号: 40211221

井関 裕康 (Izeki, Hiroyasu) (慶應義塾大学理工学部・教授)

研究者番号: 90244409

小谷 元子 (Kotani, Motoko) (東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授)

研究者番号: 50230024

綿村 哲 (Watanabe, Satoshi) (東北大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授)

研究者番号: 00201252

(3) 連携研究者 ( )

研究者番号: