

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 25 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23340020

研究課題名(和文) ランダム性の計算的諸相と超準的手法によるその構造解析

研究課題名(英文) Computational Aspects of Randomness and Their Structural Analysis via Nonstandard Methods

研究代表者

田中 一之(Tanaka, Kazuyuki)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：70188291

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究のねらいは、数学基礎論的方法、とくに超準モデルを用いる手法により、ランダムネスのダイナミズムを巨視的かつ組織的に捉え、ランダム性に対する理解を一層深めると共に、その根底にある確率やゲームの基本概念に対して新たな計算論的知見を得ることにある。本研究ではとくに次の5つの小テーマを軸に計算的な問題を講究する。(1) 構成的測度論の超準解析的議論の枠組み。(2) ランダム性の概念に基づく計算構造。(3) ランダム決定木についての考察。(4) Chaitinの停止確率の物理的性質。(5) ゲームの決定性に関する論理的扱い。

研究成果の概要(英文)：The main aim of this research is to cultivate systematic understanding of randomness via various logical methods such as non-standard analysis so that computational aspects of basic concepts about probability and games deeply correlated to randomness should be clarified. We focus on the following five topics. (1) Setting a logical framework of nonstandard arguments for constructive measure theory. (2) Investigating computational structures by randomness notions. (3) Determining the equilibrium points of game trees. (4) Elucidating physical meaning of Chaitin's Omega. (5) Logical treatments for determinacy of games.

研究分野：数学基礎論

キーワード：計算可能性理論 超準モデル ランダム性

1. 研究開始当初の背景

20世紀初め von Mises によって提案された数列のランダム性(コレクティブ)の概念は、その後計算可能性理論の発展を受け、次の3つの視点で定式化されるようになった。1. 計算の視点: 圧縮不可能な数列 .2. 測度の視点: 統計的検定を通過する列 .3. ゲームの視点: 賭けの予想が出来ない列。各々の定式化にはさらに多くのバリエーションが存在し、それらの組合せと関係がここ10年ほど活発に研究されて、アルゴリズム的ランダムネスと呼ばれる新領域が生まれた。

本研究のねらいは、この領域内外におけるランダム性の研究ダイナミズムを巨視的かつ組織的に捉えることでメタ数学的視座と手法を創発し、それによりランダム性への理解を一層深めると共に、その根底にある確率やゲームの基本概念に対して新たな計算論的知見を得ることにある。研究代表者が先行研究として行った超準解析と計算可能性理論の融合研究を活かし、本研究ではより多角的にランダム性周辺の計算構造を探究する。

2. 研究の目的

本研究の目的は、数学基礎論的方法、とくに超準モデルと計算可能性理論を融合した手法により、ランダム性のロジックに対する研究を進め、その根底に繋がる確率やゲームの基本概念に対して計算論的知見を深めることである。そのため、アルゴリズム的ランダムネスの研究が盛んな諸外国との交流を促進し、本研究を推進しながらロジック研究の将来を担う人材の育成と周辺分野との連携強化を図り、この分野の研究拠点の一つとしての土台を固める。

計算可能性とランダム性は、素朴な意味では数理科学全般で用いられている概念であるが、それらを厳密に定義し得たのは20世紀の数学基礎論の成果の一つである。しかし、特定の定義のみに依拠して多様性を失うことは不本意であり、様々な定義と多方面の応用を活かしてそれらの基本概念を再検討すれば、逆にロジックへのフィードバックも期待できよう。

本研究ではランダム性周辺の次の5つの小テーマを軸にして計算的な問題を講究する。(1) 構成的測度論の超準解析的議論の枠組み。(2) ランダム性の概念に基づく計算構造。(3) ランダム決定木についての考察。(4) Chaitin の停止確率 の物理的性質。(5) ゲームの決定性に関する論理的扱い。

3. 研究の方法

5つの小課題に対する主な研究方法は以下の通りである。

(1) 無限列の1-ランダム(マルチン・レーフ)を超準的コルモゴロフ・ランダム性の始切片と

して得るというアイデアを発展させ、構成的測度論の超準解析的議論の枠組みを作る。

(2) あるランダム性の概念を使って別のランダム性の概念が定義できるかどうかという問題を考える。

(3) ミニマックス定理を応用した Yao の原理は、どんな乱択アルゴリズムも、最悪の入力分布に対しては、決定性アルゴリズムの期待値よりも効率が良くなることを示している。本研究では、とくに二進ゲーム木について、各入力に 0, 1 が割り振られる確率が独立である場合のクエリ複雑さに関する劉 = 田中の予想について研究する。

(4) 具体的なランダム列が表す実数(とくに Chaitin の停止確率)と、エネルギー・エントロピーなどの熱力学的量との関連を調べ、アルゴリズム的ランダムネスと統計力学を結び付ける理論を構築する。

(5) ランダム性を用いてゲームの決定不能性を導く研究を一般化し、さらに強い決定不能性をもつゲームを研究する。

4. 研究成果

(1) 構成的確率論の超準解析的議論の枠組みを連携研究者の横山が構成した。(2) 停止問題に相対化された Schnorr ランダム性は任意の low 1-generic 実数に相対化された Martingale=Loef ランダム性という結果を研究代表者の学生たちが博士論文で示した。

(3) 決定木について、特に各ビットに 0, 1 が割り振られる確率が独立である場合の計算複雑さに関する劉 = 田中の予想を分担者の鈴木が解決した。(4) 分担者の只木は停止確率 を一般化した様々な熱力学的量を導入し、その不動点の性質を明らかにして、アルゴリズム的ランダム性と統計力学を結び付けた。(5) ゲーム理論の論理的基盤を研究代表者たちが探求し、新しい公理系を提案した。

毎年2月~3月に50名程度の国際研究集会および勉強会を開催した。第一線の研究者を招いて本研究の進展状況について随時アドバイスを得るとともに、若手研究者に国際舞台に立つ後押しをした。2015年3月に英国 Leeds 大学の S. Wainer 名誉教授らが研究代表者の大学を訪問した際に、代表者の研究グループにおいて若手人材が多く育っていることが高く評価された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 28件)

Y. Takahashi, T. Yamazaki and K. Tanaka, Hardness of Classically Simulating Quantum Circuits with Unbounded Toffoli and Fan-Out Gates, Quantum Information and Computation, 査読有, 14 巻, 2014 年, 1149-1164,

<http://www.rintonpress.com/journals/qic/online.html#v14n910>

S. Murakami, T. Yamazaki and K. Yokoyama, On the Ramseyan factorization theorem, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, 8493 巻, 2014 年, 324-332.

C. S. Calude and K. Tadaki, Spectral representation of some computably enumerable sets with an application to quantum provability, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, 7956 巻, 2013 年, 43-54, 10.1007/978-3-642-39074-6_6

Y. Takahashi, T. Yamazaki and K. Tanaka, Hardness of Classically Simulating Quantum Circuits with Unbounded Toffoli and Fan-Out Gates, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, 8087 巻, 2013 年, 801-812, 10.1007/978-3-642-40313-2_70

N. Peng, K. Higuchi, T. Yamazaki and K. Tanaka, Relative randomness for Martin-Loef random sets, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, 7318 巻, 2012 年, 581-588, 10.1007/978-3-642-30870-3_58

K. Yoshii and K. Tanaka, Infinite games and transfinite recursion of multiple inductive definitions, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, 7318 巻, 2012 年, 374-383, 10.1007/978-3-642-30870-3_38

Toshio Suzuki and Ryota Nakamura, The eigen distribution of an AND-OR tree under directional algorithms, IAENG International Journal of Applied Mathematics, 査読有, 42(2)巻, 2012 年, 122-128

K. Tadaki, Fixed point theorems on partial randomness, Annals of Pure and Applied Logic, 査読有, 162 巻, 2012 年, 763-774, 10.1016/j.apal.2011.09.018

K. Tadaki, Phase transition between unidirectionality and bidirectionality, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, 7060 巻, 2012 年, 203-223, 10.1007/978-3-642-27654-5_16

Ahmad Termimi Ab Ghani and Kazuyuki Tanaka, Network Games with and without Synchronicity, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, 7037 巻, 2011 年, 87-103, 10.1007/978-3-642-25280-8_9

[学会発表](計 43 件)

K. Tanaka and F. Pelupessy, Finitisations of second order principles, 日本数学会 2015 年会, 2015 年 03 月 22 日, 明治大学

田中一之, 決定問題の相転移, 情報処理学会第 77 回全国大会(招待講演), 2015 年 03 月 17 日, 京都大学

K. Tanaka and F. Pelupessy, Phase transitions and Reverse Mathematics, 日本数学会秋季総合分科会, 2014 年 09 月 27 日,

広島大学

K. Tanaka, Variants of Infinite Games and Their Strength, IMS-JSPS Joint Workshop in Mathematical Logic and Foundations of Mathematics, 2014 年 09 月 01 日, (招待講演) シンガポール国立大学

K. Tanaka, Reverse Mathematics on Measure-Theoretic Probability (Plenary talk), Asian Logic Conference, 2013 年 09 月 18 日, 中国・中山大学

Y. Takahashi, T. Yamazaki and K. Tanaka, Hardness of Classically Simulating Quantum Circuits with Unbounded Toffoli and Fan-Out Gates, The 38th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2013), 2013 年 08 月 30 日, オーストリア・Institute of Science and Technology

Toshio Suzuki and Ryota Nakamura, Probability distributions achieving the equilibrium of an AND-OR tree under directional algorithms, The International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2012, IMECS 2012, 2012 年 03 月 14-16 日, Hong Kong

K. Tanaka, Reverse Mathematics and Nonstandard Proof Methods, the Second Workshop on Logic, Ghent Univ., March 16, 2013. (招待講演)

K. Tanaka, Infinite Games and Reverse Mathematics, Fourth Workshop on Game-Theoretic Probability and Related Topics, 2012 年 11 月 14 日, (招待講演) 東京大学

N. Peng, K. Higuchi, T. Yamazaki and K. Tanaka, Relative randomness for Martin-Loef random sets, CiE 2012, 2012 年 6 月 19 日, 英国ケンブリッジ大学

K. Yoshii and K. Tanaka, Infinite games and transfinite recursion of multiple inductive definitions, CiE 2012, 2012 年 6 月 19 日, 英国ケンブリッジ大学

K. Tanaka, Reverse Mathematics, an introduction, the First Workshop on Logic, Ghent Univ., 2012 年 3 月 16 日(招待講演)

K. Yoshii and K. Tanaka, Infinite games and Reverse Mathematics, Workshop on Proof Theory and Computability Theory, 2012 年 2 月 22 日, 東京晴海

K. Tadaki, Robustness of statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory, ALC 2011, 2011 年 12 月 19 日, ニュージーランド・Victoria University of Wellington

Ahmad Termimi Ab Ghani and Kazuyuki Tanaka, Network Games with and without Synchronicity, GameSec 2011, Conference on Decision and Game Theory for Security, 2011 年 11 月 14 日, 米国・メリーランド大学

〔図書〕(計 3件)

田中一之、東京大学出版会、「ゲーデルに挑む」、2012、総ページ数 176

田中一之、東京大学出版会、「チューリングと超パズル」、2013、総ページ数 266

D. クライアン他(著) 田中一之(訳)、講談社ブルーバックス、「ロジックの世界」、2015、総ページ数 192

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 一之 (TANAKA KAZUYUKI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70188291

(2) 研究分担者

山崎 武 (YAMAZAKI TAKESHI)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：30336812

鈴木 登志雄 (SUZUKI TOSHIO)

首都大学東京・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：30235973

只木 孝太郎 (TADAKI, KOHTARO)

中央大学・研究開発機構・機構准教授

研究者番号：70407881

(3) 連携研究者

黒田 覚 (KURODA SATORU)

群馬県立女子大学・文学部・准教授

研究者番号：30300586

横山 啓太 (YOKOYAMA KEITA)

北陸先端科学技術大学院大学

・情報科学研究科・助教

研究者番号：10534430