

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 19 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23340027

研究課題名(和文)量子確率解析の新展開：作用素の変換理論とスペクトル解析

研究課題名(英文)Quantum stochastic analysis - Transforms and spectral analysis

研究代表者

尾畑 伸明 (Obata, Nobuaki)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：10169360

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,600,000円

研究成果の概要(和文)：量子確率解析の新しい展開を生み出すために、解析的側面として「量子ホワイトノイズ理論」と代数的側面として「複雑ネットワークのスペクトル解析」を軸として、理論の深化を図るとともに関連分野との連携を強化した。量子ホワイトノイズによって、ボゴリューボフ変換やギルサノフ変換を、ホワイトノイズ微分による新しいタイプの微分方程式によって特徴づけた。量子確率的手法をマンハッタン積などの有向グラフのスペクトル解析に応用した。ネットワーク上の各種ダイナミクスの相転移現象について数値計算も含めて新しい結果を得た。グラフ上の量子ウォークに対してスペクトル解析の手法を洗練して、局在化など新しい統計的性質を得た。

研究成果の概要(英文)：For the development of quantum stochastic analysis we focused on 'quantum white noise calculus' from analytic aspect and 'spectral analysis of complex networks' from algebraic aspect. We aimed at the establishment of the mathematical fundamentals and the paradigm for collaborating with other research fields for applications. By means of quantum white noise calculus, the Bogoliubov transform and the Girsanov transform are characterized by the white noise differential equations of new types. A quantum probabilistic method is applied to the spectral analysis of digraphs such as Manhattan product. The phase transition of various dynamics on networks is studied in detail with the help of numerical computation. New statistical properties of quantum walks on graphs such as localization are obtained by generalizing the existing method of spectral analysis.

研究分野：量子確率論

キーワード：関数解析 量子確率論 無限次元解析 複雑ネットワーク スペクトル解析 フォック空間 量子ホワイトノイズ 量子確率過程

1. 研究開始当初の背景

量子確率解析のルーツはフォンノイマンの有名な著書「量子力学の数学的基礎」に遡るが、1980年代以降、量子伊藤解析の流れと自由確率論に始まる非可換解析の流れに沿って大きく発展している比較的新しい研究分野である。以下に、この2つの流れから本研究の背景を、解析的側面と代数的側面として説明する。

(1) 解析的側面：Hudson-Parthasarathy (1984) は量子伊藤解析の名の下に、伊藤解析の量子的拡張を展開し、ダイレーション問題（与えられた半群を、空間を拡張して1径数ユニタリ群の射影としてとらえる）を量子確率微分方程式によって解く新しい方法論を確立した。伊藤解析が無限次元空間上の超関数論を基礎とする確率解析（マリアバン解析やホワイトノイズ解析など）に発展しているように、量子伊藤解析を非可換無限次元解析としてとらえるのが自然である。この方向で、Attal や Belavkin は量子確率微分方程式を扱い、尾畑・Jiらは「量子ホワイトノイズ解析」として超関数論の枠組みを導入して理論体系を拡張し、高次ホワイトノイズなど特異なノイズを含むホワイトノイズ方程式の一般論を構築し国際的にも認知されている。

(2) 代数的側面：Voiculescu (1986) は古典確率論の独立性の概念を「自由独立」で置き換えた自由確率論を提唱し、作用素環論における難問の解決のための枠組みを構築した。以来、自由確率論は作用素環の一分野として発展して深化しているだけでなく、日合やPetzによるランダム行列やエントロピーの研究、Bożejko や吉田による確率測度の合成積、Bianeによる無限対称群の漸近的表現論など周辺分野へ幅広く展開している。量子確率論は代数的確率空間を基礎とする、自由確率論を含むより広い理論体系であり、通常の独立性（古典独立あるいは可換独立）や自由独立にとどまらず、多様な独立性が定式化され、付随する量子中心極限定理が導かれている。さらに、尾畑・Accardiらは、独立性の諸概念とグラフ構造との関連を見出し、グラフの漸近的スペクトル解析への新しい応用を拓き、注目を集めている。A. Hora and N. Obata: Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs, Springer (2007) はこの方面の初めての著書として知られている。

2. 研究の目的

本研究では、解析的側面として「量子ホワイトノイズ理論」を、代数的側面として「複雑ネットワークのスペクトル解析」をコアテーマとして取り上げ、その基礎理論を深化させるとともに関連分野との連携を強化することで、量子確率解析を大きく展開させることを目標とした。特に、古典論の背後にある

非可換的な構造を探ることで、量子確率過程の一般論を発展させ、ネットワーク上の確率解析やダイナミクス解析に新しいアプローチを導入するために、以下のような5課題を設定した。

(1) フォック空間上の作用素の変換理論：フォック空間は、確率解析では多重伊藤積分の空間として、場の理論では波動関数の第二量子化の空間として現れ、関連する作用素は重要な研究対象である。ポゴリユーポフ変換やギルサノフ変換は、量子ホワイトノイズの2次式（の指数関数）で表される、より一般の作用素のクラスに統合される。これらは、従来のフォック空間の範疇では超関数的な作用素であり、量子ホワイトノイズ理論で扱うのが適当である。この流れで、作用素の基本的な性質である自己共役性・ユニタリ性・スペクトルなどが問題となる。

(2) 一般化された量子確率微分方程式と古典論への還元：量子ホワイトノイズ理論を用いた定式化によって、量子確率微分方程式はホワイトノイズ作用素に対する線形微分方程式となり、ノイズ項は量子ホワイトノイズの1次式となる。量子ホワイトノイズ理論では、1次式に限らず高次べきや非線形関数が自然に定義されるので、この観点から理論の大きな展開が見込まれる。

解の存在と正則性：作用素シンボル（フーリエ変換の作用素版）の理論を発展させ、解の作用するヒルベルト空間を構成する一般原理を追究し、適用範囲が狭い量子伊藤公式によらないユニタリ性の判定条件の導出をめざす。

量子ホワイトノイズ微分：新しいタイプのホワイトノイズ微分方程式が、ポゴリユーポフ変換の特徴づけに応用され注目されている。これを系統的に発展させ、ホワイトノイズ方程式による作用素の新しい特徴づけを導く。

古典論への還元：確率過程の量子分解を通して見えてくる非可換構造、それに由来する多様な独立性を古典論にフィードバックすることで従属性の分類に取り組む。

(3) 多様な独立性に付随する量子確率解析：量子確率論で知られている3つの独立性（古典・自由・プール）は q -フォック空間によって補間される。自由確率論($q=0$)では自由ブラウン運動や自由レヴィ過程が研究対象になっている。これを精査するとともに、ボゾンの場合($q=1$)に展開されている量子ホワイトノイズ理論の q -類似を構成する。特に、作用素シンボルの q -類似を定式化し、量子確率微分方程式の解の一意存在証明に応用する。もう1つの単調独立性については未開拓な部分が多く、付随するブラウン運動の構成から始めて、作用素解析の基礎を構築する。

(4) 複雑ネットワーク上の量子確率解析：成長するグラフのスペクトル解析に量子確率論的手法を開発し一定の成果を収めてきた(Hora-Obata, 2007)。この手法を一般化して

複雑ネットワークのスペクトル解析を展開する。従来の量子分解法を多モード相互作用フォック空間（多変数直交多項式に対応する）に適用できる形に拡張する。次に、ランダムウォークや量子ウォークなどの確率過程に対して量子確率論的アプローチを試み、再帰性・エルゴード性・臨界現象などの諸性質を明らかにする。

(5) 量子物理学への応用：上に述べた数学的諸問題は多かれ少なかれ量子物理や統計物理に関連する。量子ホワイトノイズの2次関数は無限次元ラプラシアンとみなすことができるので、付随するシュレディンガー方程式、熱（拡散）方程式、無限次元拡散過程を通して様々な物理モデルの性質を導く。特異な性質で興味深いレヴィ・ラプラシアンの量子的拡張、高次量子ホワイトノイズを含むシュレディンガー方程式、その解の経路積分表示が興味深い課題である。

3. 研究の方法

伝統的な数学の研究手法（文献調査、研究集会等における研究情報の収集、共同研究者の相互訪問など）によって個別的な研究課題の解決を図ってきた。小規模の国内セミナーに加えて、国際研究集会2件を主催して周辺分野の研究者との研究交流を促進した。

・ International Workshop on Noncommutative Analysis and its Future Prospects
Hokkaido University (2013.8.5-7).

Organizing Committee:

Nobuaki Obata (Chair, Tohoku University)

Fumio Hiroshima (Kyushu University),

Akihito Hora (Hokkaido University),

Norio Konno (Yokohama National University),

Hajime Tanaka (Tohoku University),

Shigeru Yamagami (Nagoya University)

・ Sapporo Workshop on Non-Commutative Analysis and Applications to Complex Phenomena

Hokkaido University (2011.9.1-3).

Organizing Committee:

Asao Arai (Hokkaido University)

Nobuaki Obata (Chair, Tohoku University)

Jaeseong Heo (Hanyang University, Korea)

4. 研究成果

(1) フォック空間上の作用素の変換理論：量子ホワイトノイズ理論では一般の作用素を量子ホワイトノイズの関数として取り扱うことを指導原理としている。量子ホワイトノイズを用いることで、正規積の概念が明確になり、無限次元正則関数によるアプローチとの関連に決着がついた[15]。作用素のユニタリ性については、複素ホワイトノイズによるアプローチを試行している。次項(2)の成果

を合わせて、量子ホワイトノイズの最近の発展を著書（分担執筆）にまとめた[図書1]。さらに、単行本を準備するに至った。

(2) 一般化された量子確率微分方程式と古典論への還元：ボゴリューボフ変換は、正準交換関係を保つ変換として知られているが、量子ホワイトノイズの2次式（の指数関数）を含むため、量子ホワイトノイズ理論で議論するのが適当である。従前の研究では、新たに導入した量子ホワイトノイズ微分による微分方程式によって、ボゴリューボフ変換を特徴づけることに成功した。この手法をギルサノフ変換に適用することに成功した[論文投稿中]。これによって、ギルサノフ変換の量子版が構成される見通しがついた。また、作用素の正規積を、微分方程式を解くことで導出する新しい手法を得た[6]。

(3) 多様な独立性に付随する量子確率解析：グラフの積構造と独立性の諸概念の関連を明らかにしてきた。新たに、有向グラフを取り上げ、特に、マンハッタン積に付随して、スペクトル解析の実例を積み上げた[10]。この方向で、独立性の新しい概念を定式化することが次の課題である。

(4) 複雑ネットワーク上の量子確率解析：成長するグラフの量子確率論的スペクトル解析の展開があった。特に、距離 k グラフに付随する組合せ論的中心極限定理を導出した[3]。さらに q 変形へのかくちょうを試みている[5]。ネットワーク上の各種ダイナミクスの相転移現象について数値計算も含めて様々な新しい結果を得た[1,8,14]。また、グラフ上の古典ランダムウォークを量子確率的に見直すことで、直交多項式との関連が明確になった[図書2]。

(5) 物理学への応用：量子ウォークの統計的性質、特に局在化が生じるためのグラフの定性的な性質を把握するため、スパイダーネットを扱い、詳しい結果が得られた[4]。また、1次元量子ウォークについて、スペクトル解析の観点から極限分布を導出した[2,9]。非線形シュレディンガー方程式[12,17]、非線形波動方程式[11]、反応拡散方程式[18]などに対して、解の漸近挙動について成果があったが、これらをグラフ上の力学系と関連付けて発展させることが今後の興味深い研究課題となった。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 41 件)

[1] T. Hasegawa and K. Nemoto: Discontinuous transition of a multistage independent cascade model on networks, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2014, P11024; 1-15 (2014) 査読有

[2] N. Konno and E. Segawa: One-dimensional quantum walks via generating function and the CGMV method, *Quantum Information and Computation* 14, 1165-1186 (2014) 査読有

[3] Y. Hibino, H. H. Lee and N. Obata: Asymptotic spectral distributions of distance-k graphs of Cartesian product graphs, *Colloq. Math.* 132, 35-51 (2013) 査読有

[4] N. Konno, N. Obata and E. Segawa: Localization of the Grover walks on spiders and free Meixner laws, *Comm. Math. Phys.* 322, 667-695 (2013) 査読有

[5] H. H. Lee and N. Obata: Distance-k graphs of hypercube and q-Hermite polynomials, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Rel. Top.* 16, 1350011, (2013) 査読有

[6] U. C. Ji and N. Obata: Calculating normal-ordered forms in Fock space by quantum white noise derivatives, *Interdiscip. Inform. Sci.* 19, 201-211, (2013) 査読有

[7] T. Hasegawa and K. Nemoto: Hierarchical scale-free network is fragile against random failure, *Physical Review E* 88, 062807, 1-5. (2013) 査読有

[8] T. Hasegawa, T. Nogawa and K. Nemoto: Profile and scaling of the fractal exponent of percolations in complex networks, *Europhysics Letters* 104, 16006, 1-6, (2013) 査読有

[9] T. Luczak, N. Konno and E. Segawa: Limit measures of inhomogeneous discrete-time quantum walks in one dimension, *Quantum Information and Processing* 12, 33-53 (2013), 査読有

[10] N. Obata: Spectra of Manhattan Products of Directed Paths Pn#P2, *Interdisciplinary Information Sciences* 18, 43-54 (2012) 査読有

[11] N. Obata: Asymptotic spectral distributions of distance k-graphs of large-dimensional hypercubes, *Banach Center Publications* 96, 287-292 (2012), 査読有

[12] H. Kubo and K. Kubota: Generalized wave operators for a system of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Hokkaido Mathematical Journal* 42, 1-31 (2013), 査読有

[13] A. de Bouard and R. Fukuizumi: Representation formula for stochastic Schrodinger evolution equations and applications, *Nonlinearity* 25, 2993-3022 (2012), 査読有

[14] T. Hasegawa, M. Sato, K. Nemoto: Phase transition without global ordering in a hierarchical scale-free network, *Physical Review E* 85, 017101, 1-4 (2012), 査読有

[15] N. Obata and H. Ouerdiane: A note on convolution operators in white noise calculus, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Rel. Top.* 14, 661-674 (2011), 査読有

[16] N. Obata: Markov product of positive definite kernels and applications to Q-matrices of graph products, *Colloq. Math.* 122, 177-184 (2011) 査読有

[17] F. Hiai, M. Mosonyi, D. Petz and C. B'eny: Quantum f-divergences and error correction, *Rev. Math. Phys.* 23, 691-747 (2011), 査読有

[18] R. Fukuizumi and A. Sacchetti: Bifurcation and stability for nonlinear Schrodinger equations with double well potential in the semi classical limit, *J. Stat. Phys.* 145, 1546-1594 (2011), 査読有

[19] G. Karch and K. Suzuki: Blow-up versus global existence of solutions to aggregation equation with diffusion, *Applicaciones Mathematicae* 38, 243-258 (2011), 査読有

〔学会発表〕(計 56 件)

[1] 尾畑伸明: 量子確率論の最近の展開 ~ スベクトルグラフ理論から量子場理論まで, 日本数学会東北支部会招待講演, 2015.2.14, 東北大学(宮城県仙台市)

[2] N. Obata: Spectral analysis of digraphs and applications to coupled oscillators, International Conference on Mathematics and its Applications (ICMAA-2014), 2014.12.15, Tamil Nadu (India)

[3] 瀬川悦生: 量子ウォークの固有写像について, 日本数学会 2014 年秋季応用数学分科会招待講演, 2014.9.26, 広島大学(広島県東広島市)

[4] 福泉麗佳: 非線型 Schrödinger 方程式一定在波とノイズ, RIMS 共同研究「偏微分方程式に付随する確率的問題」2014.9.16, 京都大学(京都府京都市)

[5] 長谷川雄央・能川知昭・近藤剛史・根本幸児: 階層ネットワークのランダム故障に対する脆弱性 II, 2014.9.10, 日本物理学会 2014 年秋季大会, 中部大学(愛知県名古屋市)

[6] N. Obata: Transforms in quantum white noise calculus, 35th International Conference on Quantum Probability and Related Topics & Satellite Conference of the International Congress of Mathematicians 2014, 2014.8.24, Cheongju (Korea)

[7] N. Obata: Lee's analytic version theorem and development of complex white noise theory, Workshop on Probability and Analysis in honor of Professor Yuh-Jia Lee, 2014.6.21, Kaohsiung (Taiwan)

[8] 長谷川雄央: 階層ネットワークのランダム故障に対する脆弱性, 日本物理学会第 69 年次大会, 2014.3.29, 東海大学(神奈川県平塚市)

[9] E. Segawa: Limit behaviors of quantum walks and spectral measure on the unit circle, AMS Special Session on Quantum Walks, Quantum Computations, and Related Topics, 2014.1.18, Baltimore (USA)

[10] T. Hasegawa: Origin of the critical phase in complex networks, Mathematics of Complex Systems, 2013.10.7, Bielefeld (Germany)

[11] N. Obata: Spectral analysis of Manhattan street networks, Tunisian Japanese Symposium

on Science, Society and Technology (TJASST 2013) 2013.11.15, Yasmine Hammamet (Tunisia)

[12] E. Segawa: Quantum walks on infinite graphs, Quantum Simulations and Quantum Walks, 2013.11.11, Pisa (Italy)

[13] N. Obata: Spectra of Manhattan street digraphs for synchronization of coupled oscillators, NIMS Hot Topics Workshops: The 8th Jikji workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2013.8.19, Daejeon (Korea)

[14] N. Obata: Asymptotic spectral distributions of distance k-graphs of Cartesian product graphs, International Conference in Honour of Sixtieth Birthday of Rajendra Bhatia: Matrices and Operators, 2012.12.27, Bangalore (India)

[15] R. Fukuizumi: Gross-Pitaevskii equation with noise, Analytical and Numerical Advances around Schrödinger equations, 2012.10.24, Toulouse (France)

[16] N. Obata: Distance k-graphs of direct product graphs and their asymptotic spectral distributions, QP33 “Quantum Probabilities and Related Fields” 2012.10.5, Luminy (France)

[17] N. Obata: Localization of quantum walks on spidersnets, 15th Workshop on Non-Commutative Harmonic Analysis: Random Matrices, representation theory and free probability, with applications, 2012.9.24, Bedlewo (Poland)

[18] T. Hasegawa: Percolation on complex networks and nonamenable graphs, ECT Workshop “Spectral Properties of Complex Networks” 2012.7.25, Trento (Italy)

[19] H. Kubo: Global existence for critical nonlinear massless Dirac equations with null structure in 3D, 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012.7.3, Orlando (USA)

[20] N. Obata: Random walk, quantum walk, and quantum probability, 6th KMS Probability Workshop, 2012.6.1, Seoul (Korea)

[21] 鈴木香奈子: Unstable patterns in a reaction-diffusion system modelling pattern formations, 第 29 回九州偏微分方程式研究集会, 2012.1.23, 九州大学西新プラザ (福岡県福岡市)

[22] N. Obata: Spectral analysis of product graphs, 3rd Settat Conference on Operator Algebras and Applications, 2011.11.3, Marrakesh (Morocco)

[23] T. Hasegawa: Percolation on complex networks and nonamenable graphs, Stochastic Dynamics in Mathematical Physics and Engineering, 2011.11.3, Bielefeld (Germany)

[24] F. Hiai: Free energy density in one-dimensional spin chains, Summer School on Non-equilibrium Statistical Mechanics, 2011.7.20, Montreal (Canada)

〔図書〕(計 2 件)

[1] U. C. Ji and N. Obata: Quantum white noise calculus and applications, in “Real and Stochastic Analysis: Current Trends (Malempati M. Rao, Ed.), Chapter 4,” pp. 269-353, World Scientific, 2014.

[2] 尾畑伸明: 確率モデル要論, 牧野書店, 2012, 298 頁

6 . 研究組織

(1)研究代表者

尾畑 伸明 (OBATA, Nobuaki)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号: 10169360

(2)研究分担者

福泉 麗佳 (FUKUIZUMI, Reika)
東北大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号: 00374182

長谷川雄央 (HASEGAWA, Takehisa)
東北大学・大学院情報科学研究科・助教
研究者番号: 10528425

瀬川悦生 (SEGAWA, Etsuo)
東北大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号: 30634547

久保英夫 (KUBO, Hideo) 23-24 年度のみ
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 50283346

日合文雄 (HIAI, Fumio) 23 年度のみ
東北大学・名誉教授
研究者番号: 30092571

鈴木香奈子 (SUZUKI, Kanako) 23 年度のみ
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号: 10451519