様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2011～2014
課題番号：２３３４００３０

研究課題名（和文）非線形偏微分方程式の背後にある確率論的構造と確率論的な摂動による解構造の変化

研究課題名（英文）Stochastic Processes and Statistical Phenomena behind Partial Differential Equaitons

研究代表者
名和　範人（NAWA, Hayato）

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：９０２１８０６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　 10,900,000円

研究成果の概要（和文）：コルモゴロフとオンサーガーの乱流に対する言明を確率過程論的に見直し，それを基にして非圧縮性オイラー方程式の散逸的弱解をサンプル空間とする新しい乱流の数学モデルを提唱した。さらに，そのモデルから類推される擬似的なギブス測度の妥当性の検証を数値的に行った。また，擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の爆発スピードを解の背後にあるネルソン拡散過程を利用して評価した。その他にも，ランダムな外力を伴った様々な数理モデルに現れる確率偏微分方程式の解の性質についても新しい結果を得た。

研究成果の概要（英文）：Revisiting Kolmogorov's scaling laws and Onsager's conjecture, we made an assessment of their mathematical relevance from the view point of stochastic processes. Then we employed the Karman-Howarth-Monin relation as the energy dissipation rate to propose a new mathematical model of turbulence in the light of dissipative weak solutions of the incompressible Euler equations of which our sample space of turbulence consists. Besides, we conducted a numerical computation to verify the existence of a Gibbs measure on our sample space. We also investigated the blowup problem for the pseudo-conformally invariant nonlinear Schroedinger equations simultaneously. We established the loglog-law on the blowup rate for a class of blowup solutions by means of Nelson diffusions. Through out our project, we learned the importance of the use of our idea and method to be enhanced and to investigate other type of nonlinear PDEs, which led us to a new KAKENHI project continuing this attempt further.

研究分野： 非線形偏微分方程式，応用確率過程論，変分法

キーワード： 非線形偏微分方程式　確率微分方程式　乱流　非圧縮性オイラー方程式　散逸的弱解　非線形シュレーディンガー方程式　爆発解　重対数法則

１．研究開始当初の背景

(1) Kolmogorov は，乱流とはある流れの場の集合（乱流のアンサンブル，数学的には時間に依存するベクトル場）の上に定義された確率測度のことであるとし，1941 年に定常・等方・一様乱流の理論を提唱した。彼の理論では，エネルギー散逸率非消失の仮定のもと，実空間では２点間の速度差の p 次モーメントの平均が２点の距離の p/3 乗に比例する事が導かれる（Kolmogorov のスケール則）。現代の数値シミュレーションや実験では p = 2, 3 以外での成立は疑問視されているが，すべての p において成り立つとする「理想乱流」というべきものを考える上では示唆的である。一方その頃，Onsager は乱流と呼べるような個別の流れ場は 1/3 次ヘルダー連続より悪い滑らかさしか持たないと予想していた。ここで問題となるのは，Kolmogorov はランダムな外力を伴った非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を乱流の基礎方程式と考えているようだが，Onsager は非圧縮性 Euler 方程式を乱流のモデルとしていた点である。

(2) 近年，この Kolmogorov のスケール則の p=3 の場合の比例定数に関する 4/3-則や 4/5-則に相当すると考えられる数学的結果が，非圧縮性 Euler 方程式の解に対して示された[3,4]。彼らの結果では，Euler 方程式は粘性項を陽に含まないので，Karman-Howarth-Monin の関係式（例えば Frisch の本[6]）をエネルギー散逸率の代価物と考えているように見える。また，Onsager 予想に相当する解の滑らかさに対する議論が，Besov 空間を用いて行われた[1,2]。

(3) 研究代表者は，分担者の坂上と松本と過去数年に渡り，互いの専門領域を越えて乱流についての議論を深めていたが，Kolmogorov のスケール則を確率過程論的に見直すことにより，この法則と Onsager 予想は無関係ではなく，Karman-Howarth-Monin の関係式をエネルギー散逸率に採用すれば，上述の[1,2,3,4]における成果を一つの数学的な「物語」として再構成できるのではないかと思い至った。再構成される「物語」では，非圧縮性 Euler 方程式の散逸的弱解と呼ばれる解のクラスが乱流のサンプルの候補であり，これらの上に，Kolmogorov がその存在を仮定した乱流場の Gibbs 測度と呼べる確率測度の構築が可能ではないかと考えた。

(4) ところが，このような非圧縮性 Euler 方程式を乱流のモデルと考えることは，あまり一般的ではなく，多くの乱流の研究においては，Kolmogorov の理論に基づき，ランダムな外力を伴った非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を乱流の基礎方程式と採用して数値計算などが行われている。このようなランダム力を伴った方程式の数学的な結果もいくつか存在しており（例えば[5]），分担者の吉田も，当時はそのような研究を行っていた。非圧縮性 Euler 方程式と伝統的な非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に基づいた理論との関係を探ることも重要な課題であるように思えた。

(5) また，研究代表者は，光ファイバーのような非線形媒質中を伝播するレーザービームの自己集束現象（Kerr 効果）を記述するとされる，よく知られた数理モデルを含むような方程式のクラスである，擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式の爆発解の爆発スピードの評価を完成すべく，解の背後にある Nelson 拡散過程を利用した解析を試みていた。この方程式は全く決定論的な方程式であり，陽に確率論的な項を持っていない。しかしながら，Nelson 拡散過程を定める伊藤型確率微分方程式に含まれる Brown 運動の重対数法則と爆発スピードには関係があるように思われた。

(6) 超流動現象に見られるような量子乱流を記述するモデル方程式としても非線形 Schrödinger 方程式は現れるが，Bose Nova と呼ばれる不安定現象がランダムな外力によるものとする見方もあり，そのような考え方に基づいた解析を，分担者の福泉が行っていた。

参考文献

[1] Cheskidov, A., Constantin, P., Friedlander, S. and Shvydkoy, R., Energy conservation and Onsager's conjecture for the Euler equations, Nonlinearity, vol 21 (2003) 1233--1252

[2] Constantin,P., E,W. and Titi, E. S. Onsager's conjecture on the energy conservstion for solutions of Euler's equation, Commun. Math. Phys., vol 165: (2005) 207-209

[3] Duchon, J. and Robert, R., Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations, Nonlinearity, vol 13 (2000) 249-255

[4] Eyink, G. L., Local 4/5-law and energy dissipation anomaly in turbulence, Nonlinearity, vol 21 (2003) 1233--1252

[5] Flandoli, F., An introduction to 3D stochastic fluid dynamics, Springer Lecture Notes in Mathmatics 1942: SPDE in hydrodynamics: recent progress and

prospects (2008) 51--150.

[6] Frisch, U., Turbulence, Legacy of A. N. Kolmogorov, Cambridge University Press (1996).

２．研究の目的

(1) 非線形および線形偏微分方程式の背後には，ある種の確率論的な構造があり，解の集団が特徴的な統計的な性質を示すことがあり得る。古典乱流のみならず量子乱流も,そのように理解することが可能であろう。本研究では，このような決定論的な系に潜む確率論的な構造をあぶりだし,決定論的な方程式の背後にある確率論的な構造が,ランダムな外力に対してどのような応答や協同をみせ,解の族の構造にどのような違いを形成するかを探求する。究極的には，その集団を支配するマクロな論理を見いだし，非線形偏微分方程式論と確率解析のより高次な結合への一歩となることを目指す。この目的のために，確率過程論に基づいた古典乱流の新しい数学モデルの構築と,非線形光学や超流動の理論におけるモデル方程式として現れる非線形 Schrödinger 方程式の解の性質を探求する。

(2) 「研究開始当初の背景」でも述べた通り,古典乱流と量子乱流を記述するにあたっての数学的な問題は，「量子乱流」の基礎方程式は非線形 Schrödinger 方程式（NLS）として，ほぼ疑いがないものと考えられるが，古典乱流は，その基礎方程式が何かということも争点の一つであるように思われる。このような一見すると正反対であるかのような状況を乱流という括りで捉えて,背後にある何らかの共通する概念を取り出せると考えている。

(3) NLS に対しては,爆発解の爆発スピードの解析だけではなく,散乱問題や基底波解の安定性の問題に対しても Nelson 拡散過程を用いた解析の適応可能性を探る。そのためにも従来型の決定論的な方程式としての解析も行い,解の爆発現象（非線形光学の Kerr 効果）や基底波解の不安定性（Bose 凝縮体の不安定性）に対する理解を深める。必ずしも擬共型不変でない NLS の爆発解の解析は,今後の当該分野の発展のために新たな知見につながることが期待される。

(4) 非圧縮性 Euler 方程式の散逸的弱解のある族を乱流のサンプルとして考えているが，これらの上に実際に Gibbs 測度を定義できるかどうか数値計算も援用しつつ検証していく。

３．研究の方法

(1) 非線形 Schrödinger 方程式の解の一つ一つの背後には Nelson 拡散過程があり,爆発解においては,その性質がマクロなレベルに現出しているように見える。一方で，古典乱流に対する Kolmogorov と Onsager の理論は，それを記述する方程式とその解のクラスは何かと問いかけており,集団として統計的に際立った性質を示す乱流を支配する Gibbs 測度の構成を我々に迫ってくる。従って NLS とは,我々の知識の階層を反転したような状況にある。これらを同時に比較検討しながら探求すれば,より深い知見に辿り着けると考えられる。幸いにして NLS は Nelson 流に２種類の流れ場に関する Euler 風の方程式に書き換えることができるので,そのような解析は可能であろう。

(2) Kolmogorov が仮定した確率測度（Gibbs 測度）が，乱流のサンプルの上に定義されているとして,その上に定義される確率変数や確率過程の性質を調べることにより,その測度の満たすべき必要条件を調べ上げる。これによって，Gibbs 測度のおおよその「形状」が分かるので，その可否を数値的に検証する。

(3) 上記の数値的な検証は,ランダムな外力を伴った非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いて行うが，それと非圧縮性 Euler 方程式の解の散逸的弱解の関係を当該分野の文献にあたるなどして考察する必要がある。この考察は散逸的弱解の正体をより明確にし，Kolmogorov のエネルギー散逸率非消失の仮定と Karman-Howarth-Monin の関係式の関係を明確にすると考えらる。

(4) NLS に対しては，擬共型不変な場合の爆発解の爆発スピードを，Nelson 拡散過程を使って評価する。この際，爆発解の形状の解析も重要になってくる。数値的な検証も行いつつ解析を進めていく。また，従来型の解析（変分法や力学系理論を用いた「ポテンシャルの井戸」近傍の解析）も並行して行い，爆発機構に対する知見を深め，さらには Nelson 拡散過程の他の問題への応用も考察していく。

(5) 以上のような取り組みとは別に,古典的な乱流に関しては，Navier-Stokes 方程式のランダムな外力を加えた場合の解析も並行して行い，Euler 方程式の散逸的弱解との関係性を確かめていく。また，NLS に対しても超流理論や非線形光学では方程式にランダムな項を付加したモデルが扱われているので,そのような方程式系の解析も並行して行い,本課題の究極的な目標に迫まる。

４．研究成果

(1) 非圧縮性 Euler 方程式の散逸的弱解に基づいた新しい乱流の数学モデルを提唱し，学会などで発表するとともに，雑

誌NONLINEARITYの招待論文として投稿し，現在改訂中である。ここでは，乱流の基礎方程式を一度忘れて,Kolmogorovのスケール則を純粋にある確率過程に対する性質と眺めることで,そのサンプルの一つ一つが,下から1/3にいくらでも近いヘルダー連続性を持つことを示すことができた。これは，Onsager が乱流を記述するとした流れ場の持つべき滑らかさと同じである。しかしながら，このような見方をすると，Kolmogorovのエネルギー散逸率非消失の仮定に対して別の解釈を与えねばならない。そこで，Karman-Howarth-Monin の関係式をエネルギー散逸率の定義とみなして,この量を計算しようとすると，自然にDuchon-Robert が Euler 流に対して証明した等式にたどり着いた。このことから,乱流を記述する方程式の候補として非圧縮性Euler方程式が浮かび上がり，その散逸的弱解こそが乱流のサンプルであるとする枠組みが自然に出来上がった。また，これから乱流のサンプル上に Gibbs 測度と呼ばれる統計力学的な確率測度の分布らしきものが予想できたので，これを数値的に検証した。この際,数値計算はランダムな外力を持ったNavier-Stokes 方程式を利用している。このことは，我々の乱流のサンプルがEuler 方程式の散逸的弱解であることに矛盾するようだが,散逸的弱解はヘルダー連続性しか持たないので,これを数値的に実現するには困難が伴う。理論的にも，従来の解析に用いられているNavier-Stokesの解とEuler方程式（外力項は持っていないことに注意）の散逸的弱解の関係を明らかにする必要があったが,完全な数学的理論にはなっていないが,これらの解は互いに他を近似している状況にあると理解することが可能であるとの見解を持つに至った。その際，Flandoli や分担者の吉田らのランダム外力項を伴った流体方程式の解析結果が参考になった。しかしながら，数学的厳密化という課題は残っている。

(2) ランダムな外力項を持った非圧縮性Navier-Stokes の解を利用した乱流モデルの構成は,研究の推進の途中で我々の構想からは外れてしまったが,乱流とは少し離れて,ランダム媒質中の高分子模型の局在現象など,時間と場所に依存する偶然性を伴う環境下で空間に分布した量（例えば，人口の分布）の確率的時間変動を対象とした,その長時間後の分布状況を予想できる理論の構築に役立った。このモデルでは，環境が時間と場所に依存する偶然性を持つという設定により，一定環境下で論じられてきた従来の確率論的人口モデルに比べ,より現実問題に即した理論が構築できるようになった。また、この研究対象は数学的な構造面からも広汎な普遍性を有し,様々な物理現象の他,ランダムな外力項を持った非線型偏微分方程式にも密接に関係していることが分かり,本研究課題は終了するが,今後の展開によってはランダム力を持った超流動モデルにおける理論との結合が期待される。

(3) 擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式の爆発解の背後にあるNelson拡散過程を考えて，Brown 運動の 末尾事象に注目することにより爆発スピード評価を行うことに成功した（論文準備中，また日本数学会話文誌「数学」への寄稿も依頼され準備中）。下からの評価は普遍性があるが,上からの評価には爆発解の極限形状に依っている。これは単に技術的な問題である可能性もあるが,今後の課題の一つである。これは従来知られていた爆発スピードの解析手法([1][2])とは全く異なる視点を提供している。解の背後のNelson拡散過程を定義する伊藤型確率微分方程式にある Brown 運動の挙動が爆発解のそれとして現れていることを示しており，まさに，解の背後にある確率論的な構造がマクロな世界に現出した一つの例だと考えられる。

(4) 擬共型不変でない優臨界な非線形項を持つ Schrödinger 方程式の基底波解の不安定性に関して，Sobolev臨界指数を含む場合でも,球対称解に対しては,「ポテンシャルの井戸」の内部だけではなく,そのある近傍にまで広げて証明することができた(arXiv:1510.08034)。時間の過去と未来に向けて爆発不安定性や散乱不安定性を示したり,異なる基底波にトラップされたりと,９通りの挙動を解は示すが，この現象に対してNelson拡散過程がどのように関わっているかは残念ながら不明である。

(5) 超流動理論では非線形 Schrödinger 方程式は Gross-Pitaevskii 方程式と呼ばれている。この方程式で記述される任意の巻き数の渦点は渦と同じ構造を持つ摂動に関して軌道安定である。ところが,その安定な渦点を初期データとして,確率論的な摂動を持つGross-Pitaevskii 方程式を考えると，その解は一般的にはノイズの効果で不安定となり,初期に与えた形は崩れてしまう。そこで，ノイズの大きさと比較して，どの程度の時間まで渦の形を保つことができるのかを，安定な渦点のまわりにおける線形化作用素からの情報と方程式の保存量を組み合わせることによって理論的に証明した。また,数値計算により，理論的に証明した渦の壊れ時間評価が最適であることの裏づけも行った。

参考文献：
[1] Merle, F. and Raphael, P., Sharp upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, Geometric Functtional Analysis, vol 13, 591--641 (2003)
[2] Merle, F. and Raphael, P., Blow-up dynamics and upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, Annals of Mathematics, vol 16, 157--222 (2005)

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計２７件）
① A. de Bouard, R. Fukuizumi and R. Poncet, Vortex solutions in Bose-Einstein condensation under a trapping potential varying randomly intime, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser.B. 査読有 vol 20(2015) pp2793-2817, DOI: 10.3934/dcdsb.2015.20.2793
② F. Comets, R. Fukushima, S. Nakajima and N. Yoshida, Limiting Results for the Free Energy of Directed Polymers in Random Environment with Unbounded Jumps, Journal of Statistical Physics, 査読有 161, Issue 3(2015)577-597, DOI:10.1007/s10955-015-1347-1
③ R. Fukuizumi and A. Sachetti, Stationary states for nonlinear Schrödinger equations with periodic potentials, Journal of Statistical Physics, 査読有, vol 156 (2014) 707-738,
④ 名和範人, A Essay on A Statistical Theory of Turbulence, 数理解析研究所講究録”, 査読なし, vol 1947(2015) 115-133,
⑤ 松本剛，名和範人，坂上貴之，乱流場の統計力学：ひとつの試論（注目研究 2014), 日本流体力学会誌「ながれ」33 (2014) 523--530
⑥ T. Akahori and H. Nawa, Blowup and scattering problem for the nonlinear Schrödinger equations, Kyoto Journal of Mathematics, 査読有, vol 53, no 3, (2013) 629 - 672, DOI: 10.1215/21562261-2265914
⑦ T. Akahori, S. Ibrahim, H. Kikuchi and H. Nawa, Existence of a ground state and scattering for a nonlinear Schrödinger equation with critical growth, Selecta Mathematica, new series, 査読あり, vol 19, issue 2, (2013) 545-609, DOI: 10.1007/s00029-012-0103-5
⑧ H. Nawa, Nelson diffusions and nonlinear Schrödinger equations, RIMS Kokyurku “Stochastic process and statistical phenomena behind PDEs”, 査読なし, vol 1823(2013) 172-181, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/-kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1823-11.pdf
⑨ T. Akahori, H. Kikuchi and H.Nawa, Scattering and blowup problem for a class of nonlinear Schrödinger equations, Differential and Integral Equations, 査読あり, vol 25, no 11-12 (2012)1075-1118,https://projecteuclid.org/euclid.die/1356012252
⑩ T. Akahori, S. Ibrahim, H. Kikuchi and H. Nawa, Existence of ground state and blow up problem for a nonlinear Schrödinger equation with critical growth, Differential and Integral Equations, 査読有, vol 25, no 3-4(2012)383-402, https://projecteuclid.org/euclid.die/1356012740
⑪ H. Terasawa and N. Yoshida, Stochastic Power Law Fluids: Existence and Uniqueness of Weak Solutions, Ann. Appl. Prob., 査読有, vol 21, no 5 (2011) 1827-1859

〔学会発表〕（計３９件）
① Nobuo Yoshida, Survival rate for a random walks in disastrous environment, Niigata Probability Workshop, 2016年1月21日「新潟大学（新潟県・新潟市)」
② 福泉麗佳, Gibbs measure for the Gross-Pitaevskii equation driven by a space-time white noise, 研究会「量子渦と非線形波動 2016」2016年01月20日, 東京理科大学
③ 名和範人, レーザービームの自己集束と非線形シュレーディンガー方程式, 研究集会「パターン生成とダイナミクスの解構造の研究」, 2015年6月26日「北海道大（北海道・札幌市)」
④ 名和範人, Nonlinear Schrödinger equations and Nelson diffusions, 北陸応用数理研究会, 2015年2月21日「金沢大学サテライトキャンパス(石川県・金沢市)」
⑤ 松本剛，名和範人，坂上貴之, 乱流場の統計力学:ひとつの試論, 日本流体力学会, 2014年9月16日「東北大学（宮城県・仙台市)」
⑥ 名和範人, Toward a mathematical theory of turbulence, RIMS 研究集会「流体と期待の数学解析」, 2014年7月4日「京都大学数理解析研究所（京都府・京都市)」
⑦ 名和範人, Nonlinear Schrödinger

equations and Nelson diffusions, 第５回「ハミルトン系とその周辺」研究集会, 2014 年 5 月 29 日「金沢大学サテライトプラザ（石川県・金沢市)」

⑧ Takashi Sakajo, Anomalous entropy dissipation via triple collapse of 2D vortices, The 2nd International Conference on Mathematical Theory of Turbulence via Harmonic Analysis and Computational Fluid Dynamics, 2014 年 3 月 5 日（奈良県・奈良市）

⑨ 赤堀公文, On nonlinear Schrödinger equations with critical grouth, RIMS 共同研究「線形および非線形分散型方程式の研究」, 2013 年 5 月 23 日「京都大学数理解析研究所（京都府・京都市)」

⑩ Hayato Nawa, Nelson diffusions and Nonlinear Schrödinger equations, UVic One Day Seminar on Dispersive PDEs, 2013 年 3 月 9 日「Victoria (カナダ)」

⑪ Nobuo Yoshida, Brownian Directed Polymers in Random Enviroment: Complete Localization and Phase Diagram, Workshop on “ Random Polymers” EURANDOM, 2013 年 1 月 18 日「Eindhoven（オランダ)」

⑫ Reika Fukuizumi, Gross-Pitaevskii equation with noise, Analytical and Numerical Advances around Schrödinger Equations, 2012 年 10 月 24 日「Toulouse（フランス)」

⑬ 名和範人, Nelson 拡散過程と非線形 Schrödinger 方程式, RIMS 共同研究「偏微分方程式の背後にある確率過程と解の族が示す統計力学的な現象の解析」 2011 年 12 月 21 日「京都大学数理解析研究所（京都府・京都市)」

⑭ 名和範人, 非線形 Schrödinger 方程式が記述する世界 -変分構造, 特異点, 基底状態 -, 研究集会「乱流現象及び非平衡系の多様性と普遍性」2011 年 11 月 11 日「九州大学応用力学研究所（福岡県・春日市)」

〔図書〕（計１件）

吉田伸生「確率の基礎から統計へ」189 ページ, 遊星社 (2012)

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
名和　範人（NAWA, Hayato)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：９０２１８０６６

(2)研究分担者
坂上　貴之（SAKAJO, Takashi)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：１０３０３６０３

吉田　伸生（YOSHIDA, Nobuo)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：４０２４０３０３

福泉　麗佳（FUKUIZUMI, Reika)
東北大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：００３７４１８２

松本　剛（Matsumoto, Takeshi)
京都大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：２０３４６０７６

(3)連携研究者
赤堀　公史（AKAHORI, Takafumi)
静岡大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：９０４３７１８７

菊池　弘明（KIKUCHI, Hiroaki)
津田塾大学・学芸学部・講師
研究者番号：００６１２２７７

(4)研究協力者
Gadi Fibich
Tel Aviv University・教授

Anne de Bouard
Ecole Polytechnique・CNRS director

大木谷　耕司（OHKITANI, Koji)
The University of Sheffield・教授