2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ９ 月 ２９ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2011～2014
課題番号：２３３４００３７
研究課題名（和文）離散可積分系と離散微分幾何による応用解析

研究課題名（英文）Applied analysis by discrete integrable systems and discrete differential geometry

研究代表者
梶原　健司（Kajiwara, Kenji）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：４０２６８１１５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　11,600,000円

研究成果の概要（和文）：離散可積分系の理論を応用し，曲線や曲面など幾何オブジェクトの性質のよい離散化に関する研究を行った．主要な成果は以下の通り．(1)離散曲線論．ユークリッド幾何や相似幾何の枠組みなどでの平面および空間離散曲線の変形理論の構築とτ函数を用いた明示公式の構成．(2)離散正則函数の理論．離散冪函数に対するパンルヴェVI型方程式の超幾何τ函数による明示公式の構成と一般化．(3)応用として，オイラー・ラグランジュ変換の離散化に基づく，非線形波動現象に対する自己適合移動格子を用いた安定かつ高精度な数値計算スキームの組織的構成．

研究成果の概要（英文）：By applying the theory of discrete integrable systems, studies on good discretization of geometric objects such as curves and surfaces have been carried out. The main results are as follows: (1) Discrete curve theory. Development of deformation theory of plane and space discrete curves and construction of explicit formula in terms of the tau functions. (2) Theory of discrete analytic functions. Construction of explicit formula for the discrete power function in terms of hypergetomtric tau function of the Painleve VI equation and generalization. (3) As an application, systematic construction of stable and highly accurate numerical scheme for nonlinear wave phenomena in terms of self-adaptive moving mesh scheme based on discretization of the Euler-Lagrange transformation.

研究分野：可積分系，離散微分幾何

キーワード：離散可積分系　離散微分幾何　離散曲面・曲線論　離散正則函数　τ函数　ソリトン方程式　パンルヴェ方程式　超幾何函数

１．研究開始当初の背景
(1) 数学的背景
可積分系の理論は数学・数理科学において重要な役割を果たしていることは広く認識されている．数学においては，高い対称性を許容する性質のよい空間を基盤とする広い意味での解析学という形で，また応用数学・工学においてはソリトンなどの非線形波動現象を媒介にした応用という形で現れることが多い．一方で，19 世紀に発達した古典微分幾何学も可積分系の一つの源であり，曲面を記述する偏微分方程式として可積分系が現れ，その変換論が議論された．70 年代からの可積分系の理論の爆発的発展の中で，数値計算への応用を当初の動機として離散可積分系の理論が発達した．80 年代後半に平均曲率一定曲面の研究から古典微分幾何と可積分系の関係が再発見される中，90 年代中頃にベルリン工科大学のグループにより離散可積分系と整合性の取れた離散曲面・曲線の理論的枠組みが提出されて発展を続け，現在それは「離散微分幾何」と呼ばれるに至っている．
① 離散曲面・曲線論
申請者はパンルヴェ系の研究の流れの中で，従来取り扱いの難しかった不均一格子上の可積分系を取り扱う手法を開発し，これを基盤として離散可積分系の τ 函数の理論を積極的に離散曲線・曲面論に応用する着想を得た．通常，離散曲線の変形や離散曲面の構成には，枠が満たす線形偏差分方程式系の両立条件から従う非線形編差分方程式を解いた上でそれを係数にもつ上記線形方程式系を解き，さらにそれを積分しなければならず，非自明な手続きが必要である．しかし，離散可積分系の理論を用いることで，具体的な明示公式を構成することが可能で，新たなアプローチを切り拓くことができると思われた．
② 離散正則函数
離散幾何の一つの研究対象として複素正則函数の離散化があり，circle packing に基礎を置いて理論が構築されている．具体的な函数に関する離散化の例は多くは知られていなかったが，2000 年に Agafonov と Bobenko は冪函数の一つの離散化を提出し，それがパンルヴェ IV 型方程式と関連していることを示した．離散冪函数では離散ソリトン方程式の一つである複比方程式で格子の整合性を担保し，冪函数としての性質をパンルヴェ VI 型方程式の相似簡約方程式 を両立させて特徴付けており，その構造をきちんと捉えることで，τ 函数による明示公式の構成が可能だと思われる．また，その構造は他のパンルヴェ系でも普遍的であることが強く示唆されることから，(離散)パンルヴェ系で特徴付けられる離散正則函数の理論を構築するという着想を得た．
(2) 応用サイドからの動機
① 離散曲面・曲線論と弾性論の結合による幾何オブジェクトの応用解析
西成(東京大学)はインクジェットプリンタのケーブルの挙動解析において,汎用の有限要素法による解析が実験を再現しないことから空間離散曲線の可積分な連続変形を考察し，弾性論(特殊コッセラー理論)の空間離散化と組み合わせて離散弾性曲線の連続変形理論(一般には非可積分)を構築した．これを一般化し，空間離散曲線の離散変形の理論を構築し，それと弾性論を組み合わせることは興味ある問題と考えられる．
(iv) ループソリトン系の離散化と数値解析
ループ型ソリトンを許容する可積分な偏微分方程式の族が知られており，その中には光ファイバ中の極超短波パルスを記述する工学的に重要な方程式を含む．それらはホドグラフ変換と呼ばれる，従属変数を係数に含む独立変数の変換で他の既知のソリトン系に帰着することが知られているが，ホドグラフ変換の離散化は困難であるとされていた．ループソリトン系の高精度の数値解析は解の自己交叉を記述する必要があることから，容易ではない．しかし，離散曲線の研究から，ホドグラフ変換に幾何学的意味づけを与え，その離散化を得ることができる可能性がある．それを利用してループソリトン系の可積分な離散化が得られれば，可変ステップ制御を組み込んだ高精度の数値計算スキームが開発でき，光ソリトンなどへの応用が可能である．

２．研究の目的
１．で記述した学術的背景に基づき，本研究では以下の 4 つのテーマの研究を行うことを目的とした．

(1) τ 函数の理論を用いた離散曲線･曲面論.
(2) 離散パンルヴェ系で特徴付けられる離散正則函数の理論.
(3) ループソリトン系の離散化と可変ステップ制御による高速･高精度数値計算スキーム
(4) 離散曲線･曲面論と弾性論の結合による幾何オブジェクトの変形理論と応用解析

(1)では特に離散曲線･曲面の定式化だけでなく，τ 函数による明示公式の構成を目指す．また，(2)では複比方程式の離散可積分系の中での位置づけを明確にして，やはり τ 函数の理論を用いて離散正則関数の構成と明示公式の構成を試みる．(3)ではホドグラフ変換の幾何学的意味を明確に特徴付け，それを用いて組織的な離散化を試みる．(4)では等距離や定捩率ではない離散曲線の変形理論を構築し，そこに弾性論を結合することを試みる．
また，以上の研究を支える理論的基盤として，離散ソリトン方程式，特に離散非線形シュレディンガー方程式など複素構造が関係して取り扱いが技術的に難しい方程式の研究や，パンルヴェ系，特に対称性の高い離散

パンルヴェ方程式に関する理論を堅固に固めること，また，周期解の構築に必要となるテータ函数に関する知見を深化させること，さらに可積分曲面論やそれに関連する微分幾何を，さまざまな観点から深めておくことも重要な目的である．

３．研究の方法

上記の研究目的を達成するため，連携研究者として松浦望（福岡大学），研究協力者として中園信孝（九州大学大学院数理学府→シドニー大学），丸野健一（テキサス大学パンアメリカン校→早稲田大学）,海外研究協力者として T. Hoffmann（ベルリン工科大学），N. Joshi（シドニー大学），W.Schief（ニューサウスウェールズ大学），J. Hietarinta（トゥルク大学）に適宜協力を依頼しつつ研究を進める．また，研究代表者は研究全体の総括にあたり，各分担者，連携研究者，協力者はテーマ(1)-(4)を次のように担当する．

(1) 離散曲線・曲面論：
　梶原，太田，井ノ口，松浦，中屋敷
(2) 離散正則函数の理論：
　梶原，増田，中園
(3) ループソリトン系の離散化と数値解析
　梶原，太田，丸野
(4) 離散曲面・曲線論と弾性論
　梶原，井ノ口，太田，中屋敷，松浦

特に離散微分幾何は日本で研究者が少ないため，研究成果の周知と若手研究者の育成を兼ねてワークショップ「離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル」を 2011 年度と 2013 年度に開催する．

４．研究成果

<u>(1)離散曲線・曲面論</u>

① 平面曲線の等周変形理論としてもっとも基本的な modified KdV 方程式による変形の離散類似として，平面離散曲線の discrete modified KdV 方程式による離散変形を，曲線の等周等距離変形として定式化した．また，τ函数による曲線の明示公式を構成した．同様に，平面離散曲線の semi-discrete modified KdV 方程式で記述される連続等周変形についてもτ函数による明示公式を与えた．

② 空間曲線に対して，modified KdV 方程式は定振率の空間曲線の振率保存等周変形を与えるが，その離散類似として discrete modified KdV 方程式の記述する変形を，定振率の空間離散曲線に対する接触平面上の等距離等周変形として定式化することに成功した．ただし，一般に接触平面上の等距離等周変形は振率を保存せず，振率保存変形も discrete sine-Gordon 方程式で記述されるものもあることが判明したが，振率保存性，discrete sine-Gordon による変形と discrete modified KdV による変形の選択を変形パラメータでコントロールできることも示した．また，1 成分 KP 階層のτ函数と Sym-Tafel の公式を用いた曲線の明示公式を構成した．さらに，曲線が掃いてできる曲面が離散 K 曲面に他ならないことを示し，そのτ函数による新しい構成法を与えた．

③相似幾何の枠組みでの平面曲線の等角変形として Burgers 方程式とその階層による変形が知られているが，その離散類似として discrete Burgers 方程式とその階層による平面離散曲線の離散等角変形を定式化した．また，discrete Burgers 方程式を不等間隔差分（差分商）により不均一格子上に拡張し，対応する離散曲線の変形も議論した．さらに，曲線の明示公式も構成した．

④ミンコフスキー平面上での曲線・離散曲線の等周変形の定式化に成功し，それが (discrete)defocusing modified KdV 方程式で与えられることを示した．また，τ函数による曲線の明示公式を与えた．

<u>(2)離散正則函数の理論</u>

①Agafonov-Bobenko による離散冪函数を考察し，パンルヴェ VI 型方程式の超幾何τ函数による明示公式を構成した．また，その結果に基づき，0 と 2 の間に限られていた指数を偶数以外の任意の複素数に拡張し，指数の実部が 1 のときに冪函数が写像としてはめこみになっており circle pattern と対応することを厳密に証明した．さらに，定義域を冪函数のリーマン面の離散類似を構成して拡張した．

②離散冪函数がパンルヴェ方程式の Bäcklund 変換が作る格子上で成立する複比方程式と相似簡約方程式で記述されることに注目し，q-パンルヴェ IV 方程式に付随する離散正則函数の定式化に成功し，それが別の離散冪函数と見なせることを明らかにした．

<u>(3)ループソリトン系の離散化と数値解析</u>

Modified KdV 方程式による平面曲線の等周変形を定式化した際の副産物として，modified KdV 方程式 WKI elastic beam 方程式の間のホドグラフ変換が，曲線上の移動座標系から固定座標系に移す Euler-Lagrange 変換に他ならないことがわかった．このことから，平面離散曲線の理論により，ホドグラフ変換の離散化を自然に得ることができ，さらに変換後の方程式が自己適合移動格子スキームという高精度な計算が可能な形で得られた．この方法をさまざまな方程式に適用し，曲線短縮方程式など非可積分系を含む方程式の離散化を得ることができた．

<u>(4)離散曲面・曲線論と弾性論</u>

この基礎となる，振率一定・振率保存ではない空間曲線の変形として，非線形シュレディンガー方程式が記述する，渦系の運動モデルとして著名な局所誘導方程式がある．その空間離散化（時間は連続）については Ablowitz-Ladik 方程式（半離散非線形シュレディンガー方程式）による離散曲線の連続的変形理論が知られているが，時間離散化につ

いては方程式の複素構造に由来する技術的な困難に遭遇して長い間克服が困難で，このテーマは研究が目標通りには進まなかった．しかし，研究期間終了直後に，枠を通常用いられる Frenet 枠でなく離散複素平行枠を導入することで技術的な困難を克服することができ，離散時間非線形シュレディンガー方程式による離散変形を定式化することに成功した．また，Sym-Tafel の公式によらない，曲線を 2 成分 KP 階層のτ函数によって直接表示する公式も構成した．

以上の成果は，離散可積分系，特にτ函数の理論を有効に用いて離散微分幾何の新たな側面を切り拓くことになった．弾性論との結合については当初の目標通りには進まなかったが，研究期間終了直後とはいえ，離散非線形シュレディンガー方程式による離散空間曲線の定式化が満足いく形ででき，技術的な困難を克服したことは意義が大きく，今後の大きな進展が期待できる．相似幾何の平面曲線の変形理論はホドグラフ変換を組み合わせて多孔質媒質中の水の浸透モデルへの応用が期待されており，また，CAD の美的曲線の拡張に関する応用も検討されている．さらに，曲線の変形は一般には非斉次項のついた非可積分な方程式で記述される変形に拡張でき，それは Hele-Shaw 問題やパターン形成モデルなどに応用が可能だと期待される．その他，離散ソリトン方程式の rogue wave 解などの新しい解の研究や，磁場項を持つ調和写像の研究，代数曲線のテータ函数の理論的な研究など，非常に多くの成果が得られた．以上，本研究で得られた結果は，次のさらなる発展の基盤としてさらに多くの果実を産み出すことになると強く期待される．

最後に，研究成果の周知と若手研究者の育成を兼ねて「離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル」を 2012 年 2 月と 2014 年 2 月に実施し，2012 年にはレクチャーノートを出版した．全国から 2012 年には 53 名，より少人数で行うことを意図した 2014 年には 37 名の参加があった．首都圏，関西地区から熱心な学部生の参加もあり，開催の意図は十分以上に達成できたと考える．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 37 件）

(1) K. Kajiwara and S. Kakei, Toda lattice hierarchy and Goldstein-Petrich flows for plane curves, to appear in Comentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli (2015) （査読あり）．

(2) T. Masuda, A q-analogue of the higher order Painlevé type equations with the affine Weyl group symmetry of type D, to appear in Funkcialaj Ekvacioj (2015) （査読あり）．

(3) J. Inoguchi, K. Kajiwara, N, Matsuura and Y. Ohta, Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves, J. Phys. A: Math. Theoret. 47(25)(2014) 235202, doi:10.1088/1751-8113/47/23/235202. （査読あり）

(4) Y. Ohta and J. Yang, General rogue waves in the focusing and defocusing Ablowitz-Ladik equations, J. Phys. A: Math. Theoret. 47(23)(2014) 255201, doi:10.1088/1751-8113/47/25/255201 （査読あり）

(5) D.Brander, J.Inoguchi and S.-P.Kobayashi, Constant Gaussian curvature surfaces in the 3-sphere via loop groups, Pacific Journal of Mathematics, 269(2)(2014)281-303, doi:10.2140/pjm.2014.269.281（査読あり）．

(6) A.Mironov and A.Nakayashiki, Discretization of Baker-Akhiezer modules and commuting difference operators in several discrete variables, Transactions of the Moscow Mathematical Society 2013(2013) 261-279（査読あり）．

(7) H. Ando, M. Hay, K. Kajiwara and T. Masuda, An explicit formula for the discrete power function associated with circle patterns of Schramm type, Funkcialaj Ekvacioj 57(2014) 1-41（査読あり）．

(8) J.Inoguchi, K.Kajiwara, N.Matsuura and Y.Ohta, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves,Kyushu Journal of Mathematics 66(2012) 303-324（査読あり）．

(9) 井ノ口順一，曲面の差分幾何，京都大学数理解析研究所講究録別冊「可積分系数理の進化」B30(2012) 77-99（査読あり）．

(10) B.F. Feng, J. Inoguchi, K. Kajiwara, K. Maruno and Y. Ohta, Discrete integrable systems and hodograph transformations arising from motions of discrete plane curves, J. Phys. A: Math. Theoret. 44(39)(2011) 395201, doi:10.1088/1751-8113/44/39/395201

〔学会発表〕（計 85 件）

(1) K. Kajiwara, Integrable discrete deformations of discrete curves: geometry and solitons, old and new, Representation theory, special function and Painlevé equation, 2015 年 3 月 4 日，京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）．

(2) K. Kajiwara, Integrable discrete

deformations of discrete curves, Topics in differential geometry and its discretizations, 2015 年 1 月 12 日, 東北大学 WPI-AIMR（宮城県・仙台市）.

(3) 井ノ口順一, 可積分幾何入門, opics in Differential Geometry and its Discretizations チュートリアル, 2014 年 12 月 10 日, 東北大学大学院理学研究科（宮城県・仙台市).

(4) A. Nakayashiki, An application of the theory of tau function to Riemann's theta function, Algebraic Curves with Symmetries, Their Jacobians and Integrable Dynamical Systems, 2014 年 7 月 31 日, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kiev(Ukraine).

(5) Y. Ohta, Rogue Waves for Some Soliton Equations, SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures, 2014 年 8 月 13 日, University of Cambridge,Cambridge (UK).

(6) 増田哲, 離散冪函数の明示公式と諸性質, 非線形数理モデルの諸相:連続,離散,超離散,その先, 2014 年 8 月 9 日, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所（福岡県・福岡市).

(7) K. Kajiwara, Discrete mKdV flow on discrete space curves, Discrete Integrable Systems, 2014 年 7 月 10 日, Isaac Newton Institute of Mathematical Sciences, Cambridge (UK).

(8) A. Nakayashiki, Riemann surfaces and Schur functions, String theory, Integrable systems and Representation Theory, 2014 年 7 月 30 日, 京都大学数理解析研究所（京都府・京都市).

(9) 井ノ口順一, Minimal surfaces in the Heisenberg group via loop groups, 第 2 回日本スペイン幾何学研究集会, 2014 年 2 月 9 日, 東京工業大学（東京都・大田区).

(10) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, integrable discretizations and self-adaptive moving mesh methods for a class of nonlinear wave equations, The 8th IMACS conference on nonlinear evolution equations and wave phenomena: computation and theory, 2013 年 3 月 25 日, University of Georgia(Athens,USA).

〔図書〕（計８件）

(1) J.Inoguchi, K.Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Discrete models of isoperimetric deformation of plane curves, in: R. Nishii (ed.), A mathematical approach to research problems of science and technology-theoretical basis and developments in mathematical modelling, Mathematics for Industry 5 (Springer 2014)89-100,doi:10.1007/978-4-431-55060-0_7.

(2) 井ノ口順一, 太田泰広, 筧三郎, 梶原健司, 松浦望 編, 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012, COE Lecture Note 40(2012), Kyushu University(152 ページ).

(3) 梶原健司, 離散曲線のダイナミクスと離散可積分系, 立教大学数理物理学研究センターLecture Note 1(2013)(49 ページ).

(4) A. Nakayashiki and K. Yori, Derivatives of Schur, tau and sigma functions on Abel-Jacobi images, in: K. Iohara et al (eds.), Symmetries, Integrable Systems and Representations (Springer 2013) 429-462.

６．研究組織

(1)研究代表者

梶原 健司（KAJIWARA, Kenji）
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授
研究者番号：40268115

(2)研究分担者

井ノ口 順一（INOGUCHI, Jun-ichi）
山形大学・理学部・教授
研究者番号： 40309886

中屋敷 厚（NAKAYASHIKI, Atsushi）
津田塾大学・学芸学部・教授
研究者番号：10237456

増田 哲（MASUDA, Tetsu）
青山学院大学・理工学部・准教授
研究者番号：00335457

太田 泰広（OHTA, Yasuhiro）
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10213745

(3)連携研究者

松浦 望（MATSUURA, Nozomu）
福岡大学・理学部・助教
研究者番号：00389339