

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23340115

研究課題名(和文) 数理論理学における量子トポロジーとモジュラー形式の総合的研究

研究課題名(英文) Quantum Topology and Modular Forms in Mathematical Physics

## 研究代表者

樋上 和弘 (Hikami, Kazuhiro)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60262151

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,900,000円

研究成果の概要(和文)：結び目・3次元多様体の量子不変量の幾何的および数論的な性質に関する研究を行った。特に色つきジョーンズ多項式の双曲幾何との関係、またトーラス結び目の場合についてはモジュラー形式との関連について研究を行った。  
また、ラマヌジャンのモックテータ函数理論を超対称共形代数に応用し、モックテータ函数のフーリエ係数と有限群の既約表現次数との関連を示すムーンシャイン現象に関する研究を行った。

研究成果の概要(英文)：Quantum invariants of knots and 3-manifolds has been developed since Jones and Witten. We have studied a geometric aspect of the colored Jones polynomial. Some of the colored Jones polynomial was shown to have a nearly-modular property.  
We have applied a method of the Ramanujan mock theta function to the superconformal algebra. We have studied "moonshine" phenomena which suggests a strange relationship between Fourier coefficients of mock theta function and irreducible representation of finite groups.

研究分野：数理論理学

キーワード：数理論理学 モジュラー形式 量子トポロジー

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 結び目・3次元多様体の量子不変量は組み合わせ的に構成され、数学・物理学の両分野から活発に研究されてきた。量子不変量の代表例である色つきジョーンズ多項式に関する未解決問題のひとつとして体積予想が挙げられる。色つきジョーンズ多項式の特異値の漸近的な振る舞いが結び目の双曲体積で決定されるであろうとする予想であり、量子不変量の幾何的性質を解明する上で重要である。

また一方、非双曲結び目であるトーラス結び目の色つきジョーンズ多項式とモジュラー形式との関連も指摘されていた。厳密なモジュラー性はもたないものの、ラマヌジャンのモックテータ関数のような「モジュラー性に近い性質」をもつ。このような関数は「量子モジュラー形式」と呼ばれ、解明すべき問題が数多く残されている。

(2) ラマヌジャンのモックテータ関数は永らくその素性が明らかではなかったが、ツベガスによって調和マース形式との関係が明らかにされて以降、急速に研究が発展し、数論だけではなく様々な分野に応用されている。その一つが超対称共形代数(SCA)である。SCAの指標はモックテータ関数で書き表され、K3曲面の楕円種数を指標で分解したときに現れる数はモックテータ関数のフーリエ係数となる。このフーリエ係数とマシュー群 M24 の既約表現の次数との間に対応関係が存在することが指摘された。この現象はマシュー・ムーンシャインと呼ばれ、たいへん注目を集めている。

## 2. 研究の目的

モジュラー形式、特にラマヌジャンのモックテータ関数に関する成果・手法を量子トポロジー、SCA など数理物理学のさまざまな分野に適用して、体積予想やムーンシャインなどの未解決問題の解明にあたり、新たなブレイクスルーを探ることを目的とする。

## 3. 研究の方法

研究代表者は江口(研究分担者)と協力してSCAに関わるムーンシャイン現象の研究にあたる。また、村上斉・村上順(研究分担者)とともにさまざまな結び目・3次元多様体の量子不変量の解析を行う。特にモジュラー性、および双曲幾何との関連性について、数式処理・数値計算を適宜行いながら、効率よく研究を推進する。

## 4. 研究成果

国際研究集会での招待講演も数多く、十分な成果を挙げた。下記にいくつかの成果を列記する。

(1) K3 曲面など複素多様体の楕円種数は一般に重み 0 のヤコビ形式となる。一方、 $N=4$  SCA の指標には BPS・非 BPS の 2 種類あるが、BPS 指標のモジュラー変換性はラマヌジャンのモックテータ関数と似た振る舞いを示し、モックヤコビ形式となる。そのため、楕円種数を SCA の指標で分解したときに得られる非 BPS 状態数は、モックテータ関数のフーリエ係数となる。

K3 曲面の場合、 $N=4$   $c=6$  の SCA 指標を用いた展開係数がマシュー群 M24 の既約表現次数との奇妙な関係が江口・大栗・立川によって発見された(マシュー・ムーンシャイン)。M24 の各共役類に対応して楕円種数が定義されるが、江口(研究分担者)と研究代表者はモジュラー形式の特徴付けを行った。また、いくつかの共役類に対する楕円種数を K3 ヒルベルト概型の場合について考察し、ポーチーズ積表示を与えた。

(2) K3 曲面とマシュー群 M24 との関係はもともと幾何的な考察によって得られていた。同様の研究によって、エンリケス曲面とマシュー群 M12 との関係が最近示唆された。これに基づき、エンリケス曲面に関連するヤコビ形式の SCA 指標による分解を行い、同じマシュー群 M12 とのムーンシャイン現象を発見した。

(3) マシュー・ムーンシャインでの楕円種数は重み 0 指数 1 のヤコビ形式であった。ヤコビ形式が楕円種数となるためにはさまざまな条件が課されるが、その条件を無視し、単純に重み 0 指数  $k$  のヤコビ形式を  $c=6k$   $N=4$  SCA の指標で分解することは可能である。うまく適当なヤコビ形式を選ぶことによって、非 BPS 状態数と他の有限群の既約表現次数との関係性が存在することが指摘された(アンブラル・ムーンシャイン)。ここで現れる有限群はリーチ格子の対称性を示しているとされる。

江口(研究分担者)と研究代表者は同じヤコビ形式の  $N=2$  SCA の指標での分解を試みた。 $N=4$  SCA の場合と同じく、 $N=2$  SCA の BPS 状態の指標もモックヤコビ形式であり、ヤコビ形式を分解すると非 BPS 状態数はモックテータ関数のフーリエ係数で表される。その結果、有限群  $L2(11)$  の新しいムーンシャイン現象を発見し、すべての共役類に対応するヤコビ形式を構成した。

(4) 体積予想は、量子不変量と双曲幾何学との関係を示唆する重要な予想である。村上斉(分担研究者)は、トーラス結び目や八の字結び目をケーブル化した結び目の色つ

きジョーンズ多項式を厳密に計算した。また、その漸近的な振る舞いを調べ、ライデマイスター捻れや基本群といった古典的不変量との関係を明らかにした。

(5) 結び目の色つきジョーンズ多項式は量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  の表現を用いて構成され、 $q$  が 1 の冪根の時にカシャエフ不変量と呼ばれる。また一方、異なる最高ウェイト表現を用いることで色つきアレキサンダー多項式が定義されるが、カシャエフ不変量はその特殊値であると見なすことも出来る。村上順（研究分担者）は色つきアレキサンダー多項式に関連する量子  $6j$  記号を得た。また、この  $6j$  記号の漸近形を調べ、双曲四面体の体積との関連を調べた。

(6) カシャエフ不変量はもともと量子二重対数関数を用いて構成された。フォーミンとゼレヴィンスキーによって 2000 年頃に定義されたクラスター代数は近年盛んに研究されており、その量子化において量子二重対数関数は特に重要である。そのため、クラスター代数の量子不変量における役割を研究することは重要である。研究代表者は山崎との共同研究において、量子クラスター代数を用いてヤン・バクスター方程式の解を構成し、カシャエフの  $R$  行列との関連を明らかにした。また、クラスター代数の  $x$  変数・ $y$  変数の 3 次元双曲幾何における役割を明らかにした。

(7) トーラス結び目は非双曲結び目であるため、カシャエフ不変量の漸近的な振る舞いは八の字結び目のような双曲結び目とは全く異なった性質を示す。三葉結び目に対応するコンツェヴィッチ・ザギエ級数が代表例であり、ラマヌジャンのモックテータ函数に近い振る舞いを示す。研究代表者はラヴジョイ（フランス）と共同で、トーラス結び目の色つきジョーンズ多項式のある種の拡張として  $q$  超幾何級数を構成した。単峰型数列の母関数と関連する  $q$  の無限級数であるが、1 の冪根のときにはカシャエフ不変量と一致する。組合せ的にも興味深い性質を持つものと期待されるが、まずはヘッケ型の  $q$  級数表示を得、モジュラー変換性についての研究を行った。

(8) モックテータ函数はモジュラー形式の周期積分を加えることで調和マース形式となる。江口（研究分担者）は SCFT 指標から得られる調和マース形式の解析的性質を調べ、新しい表示を得た。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 30 件)

- 1 K. Hikami and J. Lovejoy, “Torus knots and quantum modular forms”, *Research in the Mathematical Sciences* 2 (2015) 2, 15 pages [査読有], doi:10.1186/s40687-014-0016-3
- 2 K. Hikami and R. Inoue, “Braids, complex volume, and cluster algebra”, *Algebraic and Geometric Topology* 掲載予定 [査読有]
- 3 K. Hikami and R. Inoue, “Braiding operator via quantum cluster algebra”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47 (2014) 474006 [査読有], doi:10.1088/1751-8113/47/47/474006
- 4 T. Eguchi, “Lattice gauge theory and the large  $N$  reduction”, *International Journal of Modern Physics A* 29 (2014) 1430036 [査読有], doi:10.1142/S0217751X14300361
- 5 T. Eguchi and Y. Sugawara, “Compact formulas for the completed mock modular forms”, *Journal of High Energy Physics* 2014 (2014) 156 [査読有], doi:10.1007/JHEP11(2014)156
- 6 J. Murakami, “Generalized Kashaev invariants for knots in three manifolds”, *Quantum Topology*, 掲載予定 [査読有]
- 7 H. Murakami, “The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of a twice-iterated torus knot”, *Acta Mathematica Vietnamica* 39 (2015) 649–710 [査読有], doi:10.1007/s40306-014-0084-x
- 8 T. Eguchi and K. Hikami, “Enriques moonshine”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46 (2013) 312001, 11 pages [査読有], doi:10.1088/1751-8113/46/31/312001
- 9 K. Hikami and R. Inoue, “Cluster algebra and complex volume of once-punctured torus bundles and two-bridge links”, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 23 (2014) 1450006, 33 pages [査読有], doi:10.1142/S0218216514500060

- 10 K. Hikami and R. Inoue, “Cluster algebra and complex volume”, RIMS Kokyuroku 1866 (2013) 120–134 [ 査読無 ]
- 11 H. Murakami, “The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of the figure-eight knot”, Journal of Topology 6 (2013) 193–216 [ 査読有 ], doi:10.1112/jtopol/jts036
- 12 A. Mizusawa and J. Murakami, “Invariants of handlebody knots via Yokota’s invariants”, Journal of Knot Theory and Its Ramifications 22 (2013) 1350068, 21 pages [ 査読有 ], doi:10.1142/S0218216513500685
- 13 J. Cho and J. Murakami, “Optimistic limits of the colored Jones polynomials”, Journal of Korean Mathematical Society 85 (2013) 641–693 [ 査読有 ], doi:10.4134/JKMS/2013.50.3.641
- 14 A. Kolpakov and J. Murakami, “Volume of a doubly truncated hyperbolic tetrahedron”, Aequationes Math 85 (2013) 449–463 [ 査読有 ], doi:10.1007/s00010-012-0153-y
- 15 F. Costantino and J. Murakami, “On  $SL(2, \mathbb{C})$  quantum  $6j$ -symbol and its relation to the hyperbolic volume”, Quantum Topology 4 (2013) 303–351 [ 査読有 ], doi:10.4171/QT/41
- 16 M. Kaneko, K. Nagatomo, and Y. Sakai, “Modular Forms and Second Order Ordinary Differential Equations: Applications to Vertex Operator Algebras”, Letters in Mathematical Physics 103 (2013) 439–453 [ 査読有 ], doi:10.1007/s11005-012-0602-5
- 17 M. Kaneko and Y. Sakai, “The Ramanujan Serre differential operators and certain elliptic curves”, Proceedings of the American Mathematical Society 141 (2013) 3421–3429 [ 査読有 ], doi:10.1090/S0002-9939-2013-11917-9
- 18 M. Kaneko, K. Tasaka, and E. Takeda, “Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2”, Mathematische Annalen 357 (2013) 1091–1118 [ 査読有 ], doi:10.1007/s00208-013-0930-5
- 19 T. Eguchi and K. Hikami, “N=2 moonshine”, Physics Letters B 717 (2012) 266–273 [ 査読有 ], doi:10.1016/j.physletb.2012.09.037
- 20 T. Eguchi and K. Hikami, “Twisted elliptic genus for K3 and Borchers product”, Letters in Mathematical Physics 102 (2012) 203–222 [ 査読有 ], doi:10.1007/s11005-012-0569-2
- 21 H. Murakami, “The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of the figure-eight knot”, Journal of Topology 6 (2013) 193–216 [ 査読有 ], doi:10.1112/jtopol/jts036
- 22 J. Murakami, “Volume formulas for spherical tetrahedron”, Proceedings of American Mathematical Society 140 (2012) 3289–3295 [ 査読有 ], doi:0.1090/S0002-9939-2011-11182-7
- 23 Y. Honda and M. Kaneko, “On Fourier coefficients of some meromorphic modular forms”, Bulletin of the Korean Mathematical Society 49 (2012) 1349–1357 [ 査読有 ], doi:10.4134/BKMS.2012.49.6.1349
- 24 K. Hikami and H. Murakami, “Representations and the colored Jones polynomial of a torus knot”, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 50 (2011) 153–171 [ 査読有 ]
- 25 K. Hikami, “Decomposition of Witten-Reshetikhin-Turaev invariant: linking pairing and modular forms”, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 50 (2011) 131–151 [ 査読有 ]
- 26 T. Eguchi and Y. Sugawara, “Non-holomorphic modular forms and  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  superconformal field theory”, Journal of High Energy Physics 1103 (2011) 107, 20 pages [ 査読有 ], doi:10.1007/JHEP03(2011)107
- 27 T. Eguchi and K. Hikami, “Note on twisted elliptic genus of K3 surface”, Physics Letters B 694 (2011) 446–455 [ 査読有 ], doi:10.1016/j.physletb.2010.10.017

- 28 T. Eguchi, H. Ooguri, and Y. Tachikawa, "Notes on the K3 surface and the Mathieu group", *Experimental Mathematics* 20 (2011) 91–96 [査読有], doi:10.1080/10586458.2011.544585
- 29 H. Murakami, "An introduction to the volume conjecture", *Contemporary Mathematics* 541 (2011) 1–40 [査読有], doi:10.1090/conm/541
- 30 H. Yoshida, Y. Miwa, and M. Kaneko, "Elliptic curves and Fibonacci numbers arising from Lindenmayer system with symbolic computations", *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing* 22 (2011) 147–164 [査読有], doi:10.1007/s00200-011-0143-7
- [学会発表](計 29 件)
- 1 K. Hikami, "Quantum modular form from torus knots", *Low-Dimensional Topology and Number Theory*, 2014 年 8 月 22 日、オーベルウルファッハ(ドイツ)
- 2 K. Hikami, "(Mock) modular form and quantum invariant", *Mock Modular Forms and Physics: Black Holes, Moonshine, and Conformal Field Theory*, 2014 年 4 月 15 日、チェンナイ(インド)
- 3 T. Eguchi, "K3 surface and Mathieu moonshine", *Moduli Space, Conformal Field Theory and Matrix Model*, 2015 年 3 月 16 日、OIST(沖縄)
- 4 T. Eguchi, "K3 Surface and Mathieu Moonshine", *岡潔シンポジウム*, 2014 年 12 月 7 日、奈良女子大学(奈良)
- 5 J. Murakami, "Logarithmic invariants of links", *Quantum Topology and Physics 2014 in Fukuoka*, 2014 年 9 月 18 日、九州大学(福岡)
- 6 J. Murakami, "Logarithmic knot invariants and hyperbolic volumes", *Knots and Low-Dimensional Manifolds*, 2014 年 6 月 19 日、バンフ(カナダ)
- 7 H. Murakami, "The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of knot", *Low-Dimensional Topology and Number Theory*, 2014 年 8 月 20 日、オーベルウルファッハ(ドイツ)
- 8 K. Hikami, "Cluster algebra and complex volume", *Intelligence of Low-Dimensional Topology*, 2013 年 5 月 24 日、数理解析研究所(京都)
- 9 K. Hikami, "Mock theta functions and moonshine", *Lectures on q-series and modular forms*, 2013 年 7 月 24–25 日、ソウル(韓国)
- 10 K. Hikami, "Moonshine and  $N=2/4$  superconformal algebras", *Mock modular forms, moonshine, and string theory*, 2013 年 8 月 28 日、ストーニーブルック(アメリカ)
- 11 K. Hikami, "Hyperbolic geometry and dilogarithm", *Quantum Dilogarithm, Modular Double, and Representation Theory*, 2013 年 11 月 20–22 日、大阪市立大学(大阪)
- 12 K. Hikami, "Quantum modular form and quantum invariants", *Modular functions and quadratic forms --- number theoretic delights*, 2013 年 12 月 23 日、中之島センター(大阪)
- 13 T. Eguchi, "Mathieu moonshine and K3 surface", *Mock Modular forms, moonshine, and string theory*, 2013 年 8 月 29 日、ストーニーブルック(アメリカ)
- 14 T. Eguchi, "Mathieu moonshine and superconformal algebras", *Arithmetic and Algebraic Geometry 2014*, 2014 年 1 月 28 日、東京大学(東京)
- 15 T. Eguchi, "Mathieu moonshine and superconformal algebras", *Peter Goddard Symposium*, 2014 年 3 月 31 日、IPMU(東京)
- 16 H. Murakami, "Survey of the volume conjecture", *Geometric Topology in Cortana*, 2013 年 6 月 4 日、コルトナ(イタリア)
- 17 J. Murakami, "Volume formulas for a spherical tetrahedron", *Geometric structures on low-dimensional manifolds*, 2013 年 5 月 24 日、ソウル(韓国)
- 18 J. Murakami, "Generalized Kashaev invariants for knots in three manifolds", *Modern Trends in*

- Topological Quantum Field Theory、2014年3月20日、ヴェエナ(オーストリア)
- 19 K. Hikami, “Superconformal algebra, mock theta functions, and moonshine”, Hypergeometric Series and Their Generalizations in Algebra, Geometry, Number Theory and Physics, 2012年5月29日、パリ(フランス)
- 20 K. Hikami, “Decomposition of elliptic genera in terms of superconformal characters”, Low-Dimensional Topology and Number Theory, 2012年8月31日、オーベルウルファッハ(ドイツ)
- 21 K. Hikami, “Cluster algebra and complex volume of 2-bridge knots”, Facets of Integrability: Random Patterns, Stochastic Processes, Hydrodynamics, Gauge Theories and Condensed Matter Systems, 2013年1月25日、ストーニーブルック(アメリカ)
- 22 K. Hikami, “On the complex volume of knots”, Bethe ansatz, Quantum Groups, and Beyond, 2013年3月9日、数理解析研究所(京都)
- 23 T. Eguchi, “Superconformal algebra and Mathieu group”, Algebraic Geometry, Modular Forms, and Applications to Physics, 2012年11月27日、エジンバラ(イギリス)
- 24 T. Eguchi, “Superconformal algebra and moonshine phenomenon”, Geometry and Physics, 2012年11月22日、ミュンヘン(ドイツ)
- 25 H. Murakami, “The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of a knot”, New Perspectives in Topological Field Theories, 2012年8月31日、ハンブルグ(ドイツ)
- 26 K. Hikami, “Character decomposition of elliptic genus”, Workshop on Mathieu Moonshine, 2011年7月9日、チューリッヒ(スイス)
- 27 K. Hikami, “Volume conjecture and quantum dilogarithm function”, Simons Summer Workshop in Mathematics and Physics, 2011年8月12日、ストーニーブルック(アメリカ)
- 28 T. Eguchi, “K3 surface and Mathieu group M24”, 弦理論3世代研究会、2011年5月16日、パリ(フランス)
- 29 T. Eguchi, “K3 surface and Mathieu group M24”, Workshop on Mathieu Moonshine, 2011年7月7日、チューリッヒ(スイス)
- 〔その他〕  
研究会開催(国際集会2件、国内集会1件)
- 1 Strings, Lattice, and Moonshine, 2014年12月4-6日、<https://sites.google.com/site/stringlaticemoonshine/>
- 2 Quantum Topology and Physics 2014 in Fukuoka, 2014年9月17-20日、<https://sites.google.com/site/quantology2014fukuoka/>
- 3 頂点作用素代数と超弦理論、2014年1月31日 -- 2月1日、<https://sites.google.com/site/superstringvoa/>
6. 研究組織
- (1) 研究代表者  
樋上 和弘 (HIKAMI, Kazuhiro)  
九州大学・数理学研究院・准教授  
研究者番号: 60262151
- (2) 研究分担者  
江口 徹 (EGUCHI, Tohru)  
立教大学・理学研究科・特任教授  
研究者番号: 20151970
- 村上 斉 (MURAKAMI, Hitoshi)  
東北大学・情報科学研究科・教授  
研究者番号: 70192771
- 村上 順 (MURAKAMI, Jun)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号: 90157751
- (3) 連携研究者  
金子 昌信 (KANEKO, Masanobu)  
九州大学・数理学研究院・教授  
研究者番号: 70202017