

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23500001

研究課題名(和文) グラフ分割アルゴリズムの設計法とその応用に関する研究

研究課題名(英文) Study on a Design Method of Graph Partition Algorithm and Its Applications

研究代表者

周 暁 (Zhou, Xiao)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：10272022

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の成果として、グラフ特に木や直並列グラフや木幅が小さいグラフに関する理論的な展開とアルゴリズムの効率化があげられる。電力網などを需要点と供給点のあるグラフでモデル化し、供給されている需要点の需要量の合計が最大になるような電力の流し方を求める最大化問題を扱っていた。本研究では、この最大化問題は木に対してすらNP困難であることを示した。さらに、部分k木に対し、グラフの分割と巧みな動的計画法を導入して、この問題を擬多項式時間で解くアルゴリズムを与えた。この成果が高く評価され、FAW-AAIM 2012の最優秀論文賞が受賞されていた。

研究成果の概要(英文)：Result of this research includes the theoretical development and efficient algorithms to solve the partition problem for graphs with small tree-width, such as trees, series-parallel graphs and partial k-trees. We modeled power delivery networks by the graph with demand vertices and supply vertices, and find an electric power transmission such that the total of the demands is maximum. In this research, we show that the problem is NP-hard even for trees. For partial k-trees, we give a pseudo polynomial-time algorithm to solve it by introducing a clever partition of graphs and dynamic programming technique. These results are appreciated and one of them won the best paper award of FAW-AAIM 2012.

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：木 部分木 グラフ分割 彩色 動的計画法

1. 研究開始当初の背景

計算量理論・アルゴリズムの分野において、グラフに関する様々な組み合わせ問題を解くアルゴリズムの研究が活発に行われてきている。これらの組み合わせ問題には、現実世界に現れる重要な問題が多く含まれている。例えば、平成18年8月14日に起きた東京大停電では8時間以上かけても、復旧できず、病院や工場などが被害を受け、何百万人もの市民生活に影響があった。復旧が遅れた1つの原因として電力復旧作業の自動化システムがあげられる。この電力復旧作業はグラフを用いてモデル化することができる。例えば、発電所や変電所をグラフの供給点とし、病院、工場、住宅地域などの配電地域をグラフの需要点とし、配電地域の間や配電地域と変電所の上に設置された開閉器をグラフの辺とする。開閉器が閉じている状態(図1では実線で表している)では、電力線に電気が流れているので、グ

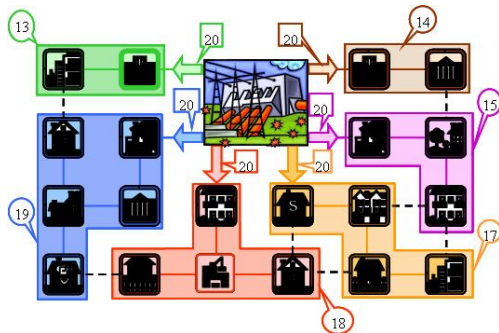


図1

ラフではそれに対応する辺が存在する。開閉器が開いている状態(図1では点線で表している)では、電気が流れていないので、グラフではそれに対応する辺が削除されている。即ち、グラフを幾つかの連結成分に分割することである。このようにして、図1の電力網をグラフで表すと、図2のようになる。正常に電力が供給されているとき、グラフの各連結成分には供給点がちょうど1つあり、しかもその供給量は連結成分内の需要点の需要

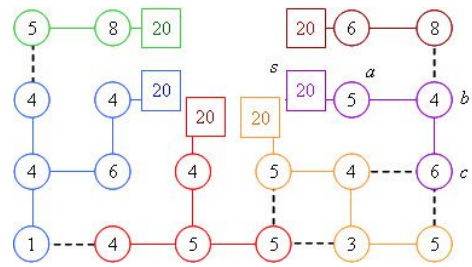


図2

量の総和以上になっていなければならない。例えば、停電事故が地域aで起きたとき、電力が変電所sから地域bとcに供給できなくなり、bとcが停電してしまう。図3のように開閉器をスイッチングすることにより、地域bとcの停電を復旧することができる。このような配電融通問題

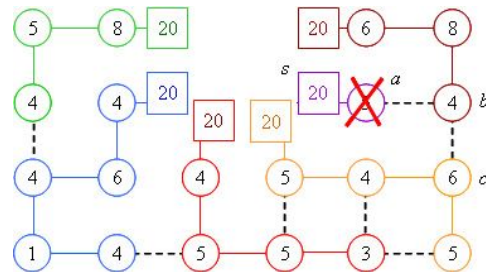


図3

を含む多くグラフ分割問題を効率よく解くアルゴリズムを設計する方法論を構築することであり、実用上も意義が大きい。

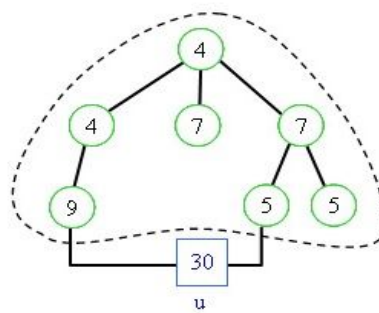
2. 研究の目的

本研究では配電融通を含む様々な問題に応用されるグラフ分割問題を解く効率のよいアルゴリズムの設計論を構築することを研究目的とする。配電融通問題を含む、実社会で生じる問題のほとんどはNP-困難であることが示されている。構造がある程度限定されたグラフ、即ち部分k木と呼ばれるグラフに対象を制限した場合には、多くのNP-困難な計算問題が多項式時間計算可能であることが明らかになってきている。本研究では、応用上よく現れるグラフのクラスである部分k木に対して、配電融通、システム解析・設計、論理回路設計、VLSIの配線問題な

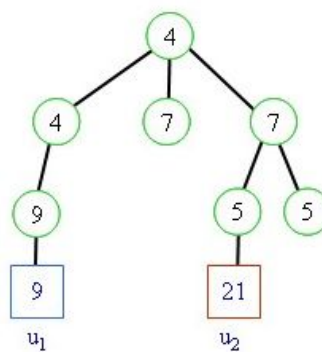
どに応用されるグラフ分割問題を解くアルゴリズムの設計論を構築することが研究目的である。

### 3. 研究の方法

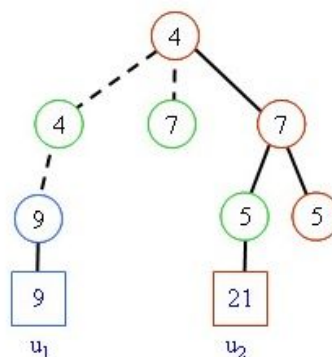
まず最初に、具体例として配電融通問題を取り上げ、それを解くアルゴリズムを開発する。実際の電力網と同規模のグラフに対し、応用上許容される時間と精度で最大分割（電力供給量を最大にする、即ち停電量を最小にする）問題の近似解を求めるヒューリスティックアルゴリズムを構築し、その実用性を計算機上で検証する。配電融通問題で正常に電力が供給されているとき、グラフの各連結成分は木である。次に、木と部分  $k$  木に対する成果を拡張する。部分  $k$  木は木の一般化であり、普通の木は部分  $1$  木であり、外平面グラフや直並列グラフは部分  $2$  木である。部分  $k$  木は直並列グラフの一般化ともいえる。具体的には部分  $k$  木の分解木という木構造と動的計画法を用いて、部分  $k$  木に対する効率のよいグラフ分割アルゴリズムを構築する。まず配電融通問題を解くアルゴリズムを考える。実際の電力網と同規模のグラフに対し、応用上許容される時間と精度で最大分割（電力供給量を最大にする、即ち停電量を最小にする）問題の近似解を求めるヒューリスティックアルゴリズムを構築し、その実用性を計算機上で検証する。実際の電力網を表すグラフ  $G$  において、需要点によって誘導される部分グラフは木である。(図4(a) 参照。太い点線で囲まれた部分は木構造をしている。) よって、入力グラフ  $G$  から木  $T$  を次のように得る。供給点  $u$  が  $k$  個の需要点  $v_1, v_2, \dots, v_k$  に隣接しているとき、 $u$  を  $k$  個



(a) 入力グラフ  $G$



(b)  $G$  から得られた木  $T$



(c)  $T$  の最大分割

図 4

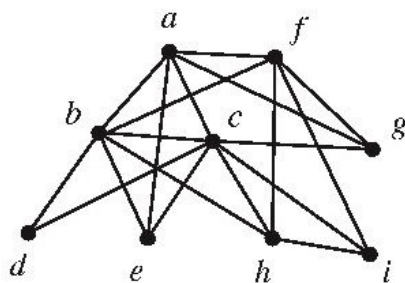
の供給点  $u_1, u_2, \dots, u_k$  に分け、それぞれ辺  $(u_i, v_i)$  で結ぶ。ここで、 $\sum_{i=1}^k s(u_i) = s(u)$  となるように供給量  $s(u)$  を  $k$  個の供給点に振り分ける。(図4(a) と (b) 参照。) これを振り分け作業と呼ぶ。ヒューリスティックアルゴリズムでは振り分け作業を全通り行わずに、ある整数  $t$  刻みで行って、木を作る。得られた木の各々に対し、我々が開発したアルゴリズムを用いて最大分割を求める。こうして求めた各々の木に対する最大分割のうち、最大の充足量（最大電

力供給量)をもつ分割を近似解とする.  $t = 1$  のとき, 本アルゴリズムは  $G$  の最適解を求めるが, それ以外のとき最適解を求めるとは限らない. 平成23年度で購入したパーソナルコンピュータを用いて, 実験によりアルゴリズムを評価した. 実験の方法としては, 入力グラフは需要量10~70の需要点が25個あり, 供給量200の供給点が3個あるとした. また, 最適解の充足量  $f_0$  と近似解の充足量  $f_A$  に対し, 近似率を  $f_A / f_0 \times 100$  と定義する. 100 個の異なる入力グラフに対し, 様々な  $t$  の値で上記の計算機実験を行い, その結果をまとめた.

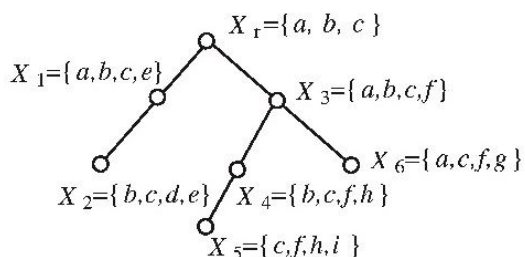
次に, 上記のアルゴリズムのシミュレーションによって得られるデータを分析し, 構造的グラフである部分  $k$  木に対する配電融通問題を解く効率的アルゴリズムを研究開発した. 得られた木に対する結果を拡張し, 部分  $k$  木に拡張した. 部分  $k$  木は木の一般化であり, 普通の木は部分 1 木であり, 外平面グラフや直並列グラフは部分 2 木である. このように部分  $k$  木は直並列グラフの一般化ともいえる. 具体的には, 部分  $k$  木の分解木という木構造を用いて, 次のように開発した.

- 部分  $k$  木  $G=(V, E)$  の分解木とは次の(1), (2), (3)の条件を満たす木  $T=(V_T, E_T)$  である.
- (1) グラフ  $G$  の点は木  $T$  の少なくとも一つの節点  $X_i \in V_T$  に属している.
  - (2)  $G$  の各辺  $e=(v, w) \in E$  に対し,  $v, w \in X_i$  なる木  $T$  の節点  $X_i \in V_T$  がある.
  - (3) 全ての節点  $X_i, X_j, X_p \in V_T$  に対し, もし  $X_i$  から  $X_p$  への  $T$  上の道に  $X_j$  があれば,  $X_i \sim X_j \sim X_p$  である.

図5(b)に図5(a)の部分3木の分解木を示す.



(a) 部分3木



(b) 分解木

図 5

分解木の幅とは  $\max\{|X_i| - 1 : X_i \in V_T\}$  である. グラフ  $G$  の幅とは全ての分解木の幅のうち最小な幅であり,  $\text{treewidth}(G)$  と書く. グラフ  $G$  が部分  $k$  木である必要十分条件は  $\text{treewidth}(G) \leq k$  である. 分解木  $T$  の任意の節点  $X_i$  を選び,  $T$  を  $X_i$  を根とする根付き木であるとみなす. 各辺  $e=(v, w) \in E$  に対して  $v, w \in X_i$  なる分解木  $T$  の一つ節点  $X_j \in V_T$  を選び,  $\text{rep}(e)=j$  と定義する.  $T$  の各点  $X_i$  について

$E(X_i) = \{e \in E : \text{rep}(e)=i, \text{節点 } X_j \in V_T \text{ を根とした } T \text{ の部分木に } X_j \in V_T \text{ が入っている.}\}$

を定義する. 辺集合  $E(X_i)$  により誘導される  $G$  の部分グラフを  $G[X_i]$  と書く. ある組合せ問題を例として説明すると, その問題の  $G[X_i]$  に対するすべての許容解の集合を  $F$  とする.  $X_i$  での各解  $f \in F$  のベクトル表現  $S(X_i, f)$  をうまく定義することによって,  $X_i$  の解のベクトル表現の種類は高々グラフの入力サイズの多項式で抑えるように,  $X_i$  で

の同値類を特徴付ける関数を定義できた。  
このようにすれば、 $T$ の葉から根に向かって、  
動的計画法を用いることによって、その問  
題を多項式時間で解くことができることを  
示した。

#### 4. 研究成果

本研究では応用上よく現れるグラフのク  
ラスである木、直並列グラフ、部分  $k$  木に  
対して、配電融通、システム解析・設計、論  
理回路設計、VLSIの配線問題を含む様々の  
問題に応用されるグラフ分割問題を解くア  
ルゴリズムの設計論を構築することが研究  
目的であった。

本研究の成果として、グラフ特に木や直  
並列グラフや木幅が小さいグラフに関する  
理論的な展開とアルゴリズムの効率化があ  
げられる。電力網などを需要点と供給点の  
あるグラフでモデル化し、供給されている  
需要点の需要量の合計が最大になるような  
電力の流し方を求める最大化問題を扱っ  
ていた。本研究では、この最大化問題は木に  
対してすらNP困難であることを示した。さ  
らに、木、直並列グラフ、部分  $k$  木に対し、  
グラフの分割と巧みな動的計画法を導入し  
て、この問題を擬多項式時間で解くアルゴ  
リズムを与えた。研究開発したアルゴリ  
ズムの多くは現在でも世界一高速であり、世  
界に誇る優れた成果として高く評価され、  
FAW-AAIM 2012の最優秀論文賞が受賞され  
ていた。

また、グラフの彩色、辺集合分割問題な  
ど重要な組合せ問題のほとんどに対し、極  
めて効率のよいアルゴリズムを与え、これ  
らグラフアルゴリズムに関する成果は一流  
国際学術誌12編と国際会議論文8編、合わせ  
て20編の論文を発表した。これらのアルゴ  
リズムの開発で導入された手法はグラフの  
彩色、分割問題に限らず多くの組合せ問題  
に応用可能であった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に  
は下線)

[雑誌論文](計12件)

1. Takehiro Ito, Kazuto Kawamura, Hitotaka  
Ono and Xiao Zhou, Reconfigure on list  
 $L(2,1)$ -labelings in a graph, Theoretical  
Computer Science (TCS), 2014, 査読有, DOI:  
10.1016/j.tcs.2014.04.011.

2. Kei Uchizawa, Takanori Aoki, Takehiro  
Ito and Xiao Zhou, Generalized rainbow  
connectivity of graphs, Theoretical  
Computer Science (TCS), 2014, 査読有, DOI:  
10.1016/j.tcs.2014.01.007.

3. Kazuhide Nishikawa, Takao Nishizeki and  
Xiao Zhou, Bandwidth consecutive  
multicolorings of graphs, Theoretical  
Computer Science (TCS), 532, pp. 64-72,  
May 2014, 査読有, DOI:  
10.1016/j.tcs.2013.02.015.

4. Taku Okada, Akira Suzuki, Takehiro Ito  
and Xiao Zhou, On the Minimum Caterpillar  
Problem in Digraphs, IEICE Trans. on  
Fundamentals of Electronics,  
Communications and Computer Sciences, Vol.  
E97-A, No. 3, pp. 848-857, March 2014,  
査読有, DOI:10.1587/transfun.E97.A.848.

5. Kei Uchizawa, Takanori Aoki, Takehiro  
Ito, Akira Suzuki and Xiao Zhou, On the  
rainbow connectivity of graphs:  
complexity and FPT algorithms,  
Algorithmica, 67, Issue 2, pp. 161-179,  
October 2013, 査読有, DOI:  
10.1007/s00453-012-9689-4.

6. Akira Suzuki, Kei Uchizawa and Xiao Zhou  
Energy and fan-in of logic circuits  
computing symmetric Boolean functions,  
Theoretical Computer Science (TCS), 505,  
pp. 74-80, September 2013, 査読有, DOI:  
10.1016/j.tcs.2012.11.039.

7. Akira Suzuki, Kei Uchizawa and Xiao Zhou  
Energy-efficient threshold circuits  
computing MOD functions, International  
Journal of Foundations of Computer Science  
(IJFCS), 24, pp. 15-29, January 2013,  
査読有, DOI: 10.1142/S0129054113400029.

8. Kei Uchizawa and Xiao Zhou,  
Energy-efficient threshold circuits for  
comparison functions, Interdisciplinary  
Information Sciences(IIS), 18, pp.



161-166, January 2012, 査読有, DOI: 10.4036/iis.2012.161.

9. Takehiro Ito, Takuya Hara, Xiao Zhou and Takao Nishizeki, Minimum cost partitions of trees with supply and demand, *Algorithmica*, 64, pp. 400-415, November 2012, 査読有, DOI: 10.1007/s00453-011-9573-7.

10. Xiao Zhou, Takashi Hikino and Takao Nishizeki, Small grid drawings of planar graphs with balanced partition, *Journal of Combinatorial Optimization*, 24, pp. 99-115, August 2012, 査読有, DOI: 10.1007/s10878-011-9381-7.

11. Takehiro Ito, Takao Nishizeki, Michael Schroder, Takeaki Uno and Xiao Zhou, Partitioning a weighted tree into subtrees with weights in a given range, *Algorithmica*, Vol. 62, Numbers 3-4, pp. 823-841, April 2012, 査読有, DOI: 10.1007/s00453-010-9485-y.

12. Takehiro Ito, Kazuto Kawamura and Xiao Zhou, An improved sufficient condition for reconfiguration of list edge-colorings in a tree, *IEICE Trans. on Information and Systems*, Vol. E95-D, No. 3, pp. 737-745, March 2012, 査読有, DOI: 10.1587/transinf.E95.D.737.

〔学会発表〕(計8件)

1. Taku Okada, Akira Suzuki, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, On the minimum caterpillar problem in digraphs, In *Proceedings of the 19th Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON'13)*, Lect. Notes in Computer Science, Springer, 7936, pp. 729-736, June 22, 2013, Hang Zhou, China, 査読有.

2. Akira Suzuki, Kei Uchizawa and Xiao Zhou, Energy-efficient threshold circuits detecting global pattern in 1-dimensional arrays, In *Proceedings of the 10th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation (TAMC'13)*, Lect. Notes in Computer Science, Springer, 7876, pp. 248-259, May 22, 2013, Hong Kong, China, 査読有.

3. Kei Uchizawa, Takanori Aoki, Takehiro Ito and Xiao Zhou, Generalized Rainbow Connectivity of Graphs, In *Proc. of the 7th International Workshop on Algorithms and Computation (WALCOM'13)*, Lect. Notes in Computer Science, Springer, 7748, pp.

233-244, Feb. 15, 2013, Kharagpur, India, 査読有.

4. Kei Uchizawa, Zhenghong Wang, Hiroki Morizumi and Xiao Zhou, Complexity of counting output patterns of logic circuits, In *Proc. of the 19th edition of Computing: the Australasian Theory Symposium (CATS'13)*, 141, pp. 37-42, Jan. 30, 2013, Adelaide, Australia, 査読有.

5. Takehiro Ito, Kazuto Kawamura, Hirotaka Ono and Xiao Zhou, Reconfiguration of list  $L(2,1)$ -labelings in a graph, In *Proc. of the 23th Annual International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC'12)*, Lect. Notes in Computer Science, Springer, 7676, pp. 34-43, Dec. 19, 2012, Taipei, Taiwan, 査読有.

6. Yiming Li, Zhiqian Ye and Xiao Zhou, Algorithm for cost non-preemptive scheduling of partial  $k$ -trees, In *Proceedings of the 2012 Symposium on Applied and Engineering Mathematics (AEM'12)*, pp. 233-236, Oct. 27, 2012, Beijing, China, 査読有.

7. Kazuhide Nishikawa, Takao Nishizeki and Xiao Zhou, Algorithms for bandwidth consecutive multicolorings of graphs, In *Proceedings of FAW-AAIM 2012*, Lect. Notes in Computer Science, Springer, 7285, pp. 117-128, May 15, 2012, Beijing, China, 査読有.

8. Kei Uchizawa, Takanori Aoki, Takehiro Ito, Akira Suzuki, and Xiao Zhou, On the rainbow connectivity of graphs: complexity and FPT algorithms, In *Proceedings of the 17th Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON'11)*, Lect. Notes in Computer Science, Springer, 6842, pp. 86-97, Aug. 15, 2011, Dallas, Texas, USA, 査読有.

〔その他〕

<http://www.ecei.tohoku.ac.jp/alg/zhou/index.html#paper>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

周 曉 (ZHOU Xiao)

東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 10272022