様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：３４４２７
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５０００２８
研究課題名（和文）グラフ理論との融合によるクリプキ意味論の新展開

研究課題名（英文）New development of Kripke semantics by combining with graph theory

研究代表者
宮崎　裕（Miyazaki, Yutaka）

大阪経済法科大学・公私立大学の部局等・准教授

研究者番号：４０３７４６０７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円、（間接経費）　　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：「クリプキフレームはグラフである」との認識の上に立ち、グラフ理論の知見を取り入れて、もっと幾何的な観点から様相論理のクリプキ意味論を見直してみようという動機でこの研究を開始した。3年間にわたる研究の結果、(1) 様相論理の意味論としては特に無限グラフを考慮に入れたグラフ理論を用いる必要があること、(2) グラフマイナー定理で使用されているマイナーの関係は2つのクリプキフレームが決める論理の間の大小関係を、壊してしまう場合がありこのままでは論理の解析に適用できないこと、(3) 無向グラフ全体を特徴づける様相論理の定式化には2つの定式化があること、などがわかった。

研究成果の概要（英文）：I started this research on basis of the observation "Kripke frame is a graph", and I aimed at restructuring the frame-theoretic approch to semantical study of modal logics by introducing the knowledge and techniques in graph theory. As the results after three-year investigation, I found the following facts. (1) We have to utilize graph theory for the class of infinite graphs, not ordinary graph theory, (2) The "minor relation" in Graph Minor Theorem may destroy the order of two modal logics which are determined by two Kripke frames. Therefore this relation is not suitable for analizing the lattice structure which is made of some class of modal logics, and (3) There are at least two methods for extending the usual modal language to characterize the logic determined by the class of all undirected graphs.

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学　情報学基礎

キーワード：数理論理学　Hybris Logic　Modal Logic　Graph Theory　WQO theory

１．研究開始当初の背景

現代的な非古典論理学の意味論的研究は、クリプキ意味論の出現によって著しく発展した。それまでの代数的意味論に比べ、クリプキフレームによる様相論理式の解釈は図式的・直観的でわかりやすく、クリプキフレームの図式的ないくつかの性質とそれらを特徴づける公理としての様相論理式との間にきれいな対応が発見されて、クリプキ意味論は命題様相論理の世界で起こる現象の理解に大きく寄与した。

ところがその後、クリプキ不完全な命題様相論理が続々と発見され、特に多くの論理をそれらが形成する束構造をも含めて扱うにはクリプキ意味論は不十分であることがわかった。このことが原因で非古典論理の意味論的研究では、現在でも代数的意味論のほうが優勢である。

また、研究開始頃の命題様相論理研究を見渡してみると、４と呼ばれる推移律の公理を持つ論理のクラスだけが大きく発展しており、その他の多くの論理のクラスに関する研究成果と比べてバランスを欠いていた。本研究代表者はこのころまで、公理 **T**(推移律)と公理 **B**(反射律)を持つ命題様相論理のクラスについて研究を行ってきた。これらの論理は、必ずしも公理 **4** を持たないためこの公理に依存した多くの証明手法が使えず難渋したが、ある時これらの論理を特徴づけるクリプキフレームが無向グラフであることに気づき、グラフ理論で普通に用いられる概念を導入していくと、このクラスに属する論理が従来とは違った観点から整理されて、いくつかの結果を得ることができた。

そこでクリプキフレームをグラフとして見る視点に立ち戻り、グラフ理論の知見を積極的に活用することでクリプキ意味論を見直してみようと考え、この研究を開始した。

２．研究の目的

(1) 「クリプキフレームはグラフである」という視点を導入することにより、命題様相論理の意味論的研究にグラフ理論の知見を積極的に活用するための基盤を整備し、現状では扱いにくい種類の命題様相論理のクラスの問題に対しても有効であるようにクリプキ意味論を強化すること。
(2) 命題様相論理の枠組みの中でグラフ理論を展開できるよう、グラフ全体のクラスで特徴づけられる様相論理を形式化し、そのうえで現在のグラフ理論における問題に対し論理学的な視点からの考察を可能にすること。特に、Robertson-Seymour によるグラフマイナー定理の証明を見直し、様相論理の立場から整理すること。さらにグラフのさまざまな性質を様相論理の論理式で特徴づけを行うこと。

３．研究の方法

(1) 無向グラフ全体のクラスで特徴づけられる命題様相論理を定式化し、その上でグラフとしてのクリプキフレームのさまざまな性質を特徴づけるような公理としての様相論理式を考察する。特にこのような論理式で特徴づけられるグラフの性質とそうでない性質の違いについて明らかにする。
(2) グラフマイナー定理の証明をクリプキ意味論的な観点から再検討する。次にこのグラフマイナー定理と様相論理の Splitting Theorem との類似性に着目し、クリプキフレームで禁止マイナーにあたる概念が何かを見極め、グラフマイナー定理と同様のグラフの特徴づけが、様相論理式を用いたクリプキフレームの特徴づけと同等になるよう、論理の定義やクリプキ意味論、また Splitting の概念などを再検討する。

４．研究成果

(1) グラフ全体のクラスで特徴づけられる様相論理 G について

無向グラフを特徴づける公理としては推移律と非反射律であるが、この非反射率は通常の命題様相論理では特徴づけできないことがわかっている。本研究代表者はこの問題に対し、言語を拡張し、nominal という通常とは別の変数を導入した Hybrid 論理の枠組みで定式化を行った。これは実際可能であり、道具立ては複雑になったが、クリプキ完全であり、かつ有限モデル性をもつ比較的扱いやすい論理が得られた。さらに本研究終盤になって nominal を可算個導入するのではなく、□の補演算にあたるような様相演算子をただ一つ導入することによっても同じグラフ全体で特徴づけられる論理 G を得られることがわかった。

この論理 G を基盤として、その上にいくつかの様相論理式を公理として加えることにより、オイラーグラフ、ハミルトングラフ、直径が k 以下のグラフ、k 色塗り分け可能なグラフ、などのクラスを特徴づけることができることがわかった。ただし、G の 2 種類の定式化で使用する言語が異なっているため、この 2 つの定式化による G と通常の様相論理 KTB との間の関係(translation の有無など)を調べることが次の課題である。

(2) グラフマイナー定理について

通常のグラフ理論では、おもに頂点の数が有限個である有限グラフのクラスのみを扱う。このグラフマイナー定理も有限グラフのクラスに対して成り立つ定理であり、頂点が非可算個あるようなグラフのクラスでは成り立たないことがわかっている。(可算無限個の頂点を持つグラフのクラスで成り立つかどうかは現在のところ未解決)

一方で様相論理の意味論としてのクリプキフレームは、一般に無限フレームのクラスを通常想定する。さらに有限フレームと無限

フレームを様相論理式で区別することはできない。したがってこのグラフマイナー定理をそのままの形で様相論理のクラスの研究に使うには、有限モデル性を持つような論理のクラスのみに限定しなければならず、もちろんそれは大変厳しい制約となるため、何らかの修正を必要とすることがわかった。

(3) いわゆる”マイナーの関係”について

グラフマイナー定理は、グラフ理論で定める”マイナーの関係”が有限グラフ全体のクラスで考えたとき WQO theory でいうところのよい擬順序になることを主張している。このマイナーの関係を 2 つの(有限の)クリプキフレームに適用するとき、2 つのクリプキフレームが決める様相論理は一般に無関係になってしまう。したがって様相論理がなす束の構造を知るためにこの関係を用いることは適当ではないことがわかった。そうではなくて、2 つのフレームが決める論理の順序に関係するような、例えば、2 つのフレームの間に”p-morphism があるという関係”が WQO theory に当てはまるかどうかを考えるという方が研究の方向としては有望であると考える。

(4) いわゆる 4 を持たない様相論理の unifiers の型について

様相論理に関する unification 問題についても 4 を公理に持つ様相論理では unification のタイプが 1 型であることがすぐにわかるが、transitivity を仮定できない論理に関しては非常に解析が難しく、ほとんど何もわかっていなかった。ここで本研究代表者は KT 以上の論理のクラス、KD 以上の論理のクラス、KB 以上の論理のクラス、KTB 以上の論理のクラスについて unifiers の分類(型)についてそれぞれ unification のタイプが 1 でないという結果を得た。これは 4 をもつ様相論理での結果と比べて対照的である。その後チェコの研究者により、様相論理 K についてその unification の型が 0 型であるという画期的な結果がもたらされた。その証明は直ちに適用できないが、それを改良してたとえば KT や KTB の unification 問題を解くことが次の課題である。

(5) WQO theory について

今回、グラフマイナー定理を調べる過程で WQO theory というものに触れた。これば順序集合がなす構造について、そこに入る順序関係とその構造を成す要素の集合の濃度の関係を調べる理論である。

様相論理のクラスがなす束構造について、そこに入る順序関係からある論理以上の論理が可算か非可算かがある場合には判定できるわけで、これこれの性質を持つ様相論理がどのくらいの濃度存在するかを調べるとき有効な手段の一つになるであろうと考えられる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　6 件）

(1) <u>Yutaka Miyazaki</u>, “Some properties of orthomodular lattices”, Summer School in General Algebra and Ordered Sets, in Svratka, Czech Republic, Sep.05 2011.

(2) <u>Yutaka Miyazaki</u>, “Unification problems in Non-weakly-transitive modal logics”, Asian Workshop on Philosophical Logic, in Jaist Ishikawa, Japan, Feb.16, 2012.

(3) <u>Yutaka Miyazaki</u>, “Unification problems in Not-weakly-transitive modal logics”, Application of Algebra in Logic and Computer Science XVI, Feb.28, 2012, in Zakopane, Poland.

(4) <u>Yutaka Miyazaki</u>, “WQO theory in Modal Logic”, Application of Algebra in Logic and Computer Science XVII, Mar.06, 2013, in Zakopane, Poland.

(5) <u>Yutaka Miyazaki</u>, “Graph theory and modal logic”, BLAST2013, in Chapman University, California, US, Aug.06, 2013.

(6) <u>Yutaka Miyazaki</u>, “Graph theory and modal logic”, Application of Algebra in Logic and Computer Science XVIII, Mar.13, 2014, in Zakopane, Poland.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

宮崎 裕（MIYAZAKI Yutaka）
大阪経済法科大学・教養部・准教授
研究者番号：40374607

(2)研究分担者　なし

(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　　)

研究者番号：