

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 22 日現在

機関番号：11302

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23501004

研究課題名(和文)小学校算数と中学校数学の接続を意図した比例概念の形成に関する実証的研究

研究課題名(英文)An experimental study on the development of the concept of proportion for the smooth connection of elementary school math and junior high school math

研究代表者

田端 輝彦(TABATA, Teruhiko)

宮城教育大学・教育学部・教授

研究者番号：80344745

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：数学者と数学教育研究者と小学校ならびに中学校教師による研究会を定期的で開催し、比例的推論の教授実験プログラムを構成するとともに、これに基づき授業実践を小学校と中学校で行った。

授業実践の結果、小学校の実践からは、第5学年の同種の量の割合の導入場面で、整数倍の比例的推論から小数倍の比例的推論への進展の過渡期的変容をとらえることができた。中学校の実践からは、第1学年のおうぎ形の中心角とその面積の場面で、比例関係にあれば比が等しいことを異種の比を手がかりにすることで、普遍的な比例関係に着目する契機となることが明らかとなった。

研究成果の概要(英文)：(1) A study meeting was held regularly by mathematicians, researchers of mathematics education, and incumbent teachers of mathematics for elementary school and secondary school, in which an instruction experiment program for proportional reasoning was constructed.

(2) From the results of the lessons in the fifth grade elementary school class, a transitional change was seen from the proportional reasoning of whole numbers multiple to the proportional reasoning of decimal multiple in the introduction of the rate of similar type of quantities. From the results of the lessons in the first grade junior high school class on the central angle of a fan shape and its area, it was observed that giving the ratio of different types of quantities as a hint and using the theorem that the ratio was equal when it was a proportional relation made it easier for students to solve the problem. It also helped them to notice a general proportional relation from a local proportional relation.

研究分野：総合領域

キーワード：比例的推論 比と比例式 比例 教授実験 カリキュラム

## 1. 研究開始当初の背景

比例的推論とは、数学的には乗法構造、数量関係としては比例関係を内在ないし前提として仮定してよいと認められる場面で行われる数学的推論である。場面の背景にある数学的構造に着目すると、比例概念は小学校から高等学校までの長期間にわたる数学学習の根幹に位置するものであり、これらの学習を進めていく上で比例的推論は、推論の方法として重要な役割を果たすこととなる。

このためもあって近年、比例的推論を研究対象としたものは多い。山口、岩崎(2004)「一般化分岐モデルに基づく分数除の教授・学習に関する研究」日本数学教育学会誌第 86 巻数学教育学論究らの研究では、小学校算数と中学校数学を接続するキーワードとして比例的推論に着目している。また、日野圭子(2006)「一人の児童の比例的推論の変容過程にみる表記の扱い」第 39 回数学教育論文発表会論文集(日本数学教育学会)は、小学生の比例的推論の学習過程に着目して教授実験を伴い、質的な研究を試みている。中学校では、清水宏幸(2003)「比例とみて問題を解くことよさを感ぜさせる指導」日本数学教育学会会誌第 85 巻第 11 号や永田潤一(2004)「『比例するとみなす』ことよさについての考察」日本数学教育学会会誌第 86 巻第 3 号が、比例していないものを比例しているとみなすことによって比例的推論を行うことの価値を論じている。

これらに対して本研究では、平成 19 年から基盤研究(c)において、小学校の実践経験のある数学教育研究者を募り、算数における比例的推論の教授・学習過程の実証的研究を行ってきた。ここでは、整数倍の比例的推論の進展ならびに比例関係の顕在化とそれらを根拠として活用する小数・分数の乗除法の指導ならびに割合の指導についての実践を行い、児童の比例概念の形成過程を詳細に分析してきたつもりである。

本研究は、これら一連の比例的推論の研究に続くものである。小学校 4 学年から 6 学年にかけての 3 年間における比例的推論の役割とその進展については、多くの示唆を得ることができたが、残された課題も多い。その 1 つが、平成 20 年告示の新しい学習指導要領において、小学校 5 学年で用語比例を扱うようになったこと、中学校 1 学年で比例式の解法を教えるようになったことによる。これらは特定研究において我々の研究グループが主張したことの 1 つが実現されたことと見ることができ、一方で同種の量の割合と異種の量の割合と比ならびに比例関係の指導から異種の量の比までも含んだ比例式の解法までを代数的に解くことができたとき、これは比例的推論の数学的定式化となる。この際の比例概念の形成の際の比例的推論の役割を解明したい。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、倍の見方から割合、比と比例ならびに比例式までの指導内容を比例概念の形成の立場から考察し、児童・生徒の比例的推論の進展の視点から実践授業を行い、分析することにある。前述したように平成 20 年告示の学習指導要領では、小学校 5 学年で比例、中学校 1 学年で比例式の解法を扱うことになった。すなわち、本研究が対象とする指導内容は、小学校算数と中学校数学の橋渡しとなるとともに、倍・割合の見方から比ならびに比例式までを比例的推論という思考方法を中心に据えた比例概念の形成過程と位置づけることができる。これらを数学者と数学教育学者とが協力して実際の授業研究会を行い、検証することによって達成したいと考えている。

## 3. 研究の方法

小学校算数と中学校数学の橋渡しとしての比例概念の形成における比例的推論の役割を教授・学習過程を実証的に研究することによって解明するため、本研究では、次の二つの研究課題を設定し、それらを解決することを目標とする。

これまでの研究において、比例的推論を中心とした小学校と中学校段階のカリキュラムはできている。この橋渡しとしての割合ならびに比と比例の概念形成についての勉強会を開き、単元レベルまで詳細の教授実験プログラムを構成することを目指す。

次に、教授実験プログラムに基づく、教授実験を行う。小学校第 5・6 学年と公立中学校第 1 学年の二つのそれぞれのグループで、比例的推論の形成過程を分析する。

## 4. 研究成果

本研究では、東京都内の国立大学附属小学校と宮城県内の公立中学校で一年間、同じ児童の比例的推論の進展の教授実験と追跡調査を行った。以下では、学校ごとにわけ、それぞれの実践の概要と成果をまとめた。

### (1) 小学校第 5 学年の比例的推論の進展

比例式や比例の前提となる割合には、同種の量の割合と異種の量の割合とがある。学習指導要領でこれら二つの割合は、第 5 学年で指導することになっている。本研究では、多くの教科書の指導順序と同様、異種の量の割合の次に同種の量の割合の順番で指導することにした。なお、本稿をまとめている段階で異種の量の割合から比例関係を顕在化させ比例的推論を進展させる分析結果はまとまっていない。以下、本稿では同種の量の割合についての研究意図と成果をまとめることにする。

割合を単に倍の言い換えでなく、普遍性をもった 2 量の関係を表す数であることの側面を強調するならば、比例関係を顕在化させることが大切である。この立場に立ったとき、異種の量の割合、同種の量の割合と比例関係

を顕在化することを意図した実践を構想し、子どもが小数倍の倍比例及び整数倍の等分比例をどのように見出し、どのように認めていくか、その様相を探った(詳しくは論文を参照されたい)。

シュートの成功率を比較する本実践の結果、以下の3点が明らかとなった。

第1に、整数倍の倍比例を認めたとしても1.5倍ならば1.5倍になる関係を比例関係と認められない子どもがいること、一見認めている子どもでも、形式的に1.5を当てはめているだけの可能性があることが確認できた。

第2に、与えられた数対から新たな公約量の数対を等分比例により作りそれをもとに倍比例により求めた値と、小数倍で求めた値とが一致することを確かめる過程を踏む学習活動により、小数倍まで拡張した比例関係を認めることができることが明らかとなった。

第3に、公約量の数対を作る際には、 $\bigcirc \times$ 表の $\bigcirc$ と $\times$ を入れ替えることによって同じ事象の繰り返しと見られたとき、投げた回数と入った回数に等分比例を認め、それらが「同じ調子」を表していることを理解できることがわかった。

## (2) 中学校第1学年の比例的推論の進展

算数と数学を接続する視点から比と比例式ならびに比例の学習を再考するためには、それを捉える枠組みが必要である。前述したように、小学校算数では同種の量の割合と異種の量の割合とを区別して指導している。これを中学校数学では、量の異同を区別することなく考え、代数的に形式的に処理できるよさがある。一方でここに接続の困難点がある。このため本実践では、おうぎ形の面積や弧の長さを中心角についての場面で、「小中の比例の定義の違い」、「着目する比が内比か外比か」、「外比の比の値の意味の解釈の変化」の3つの視点を枠組みとして設定することにした。実際の実践授業では、異種の2量の比を認め、比例する2つの数量関係では、比例式が成り立つことを指導した。この実践を通して次の3つのことを明らかにすることができた(詳しくは論文を参照されたい)。

第1に、異種の比が等しいとする比例式のよさを生徒が感じ取ることができた。

第2に、小学校の比例の定義にも基づいて2量の比例関係を捉え、比例しているから異種の外比が等しいことを認めることにより、生徒の比例の認識が深まることがわかった。

第3に、同種の外比だけでなく、異種の外比にも着目することで、普遍的な関係に着目する契機が生まれ、「比例をなす」から「正比例する」への移行の手がかりが得られることが明らかとなった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

(雑誌論文)(計12件)

小野雄祐, 田端輝彦, 市川啓, 高橋丈夫 (2014), 比と比例式の学習指導に関する一考察, 第47回秋期研究大会特集号, 日本数学教育学会, pp.41-48 査読有り

高橋丈夫, 田端輝彦, 市川啓 (2014), 割合の導入時における比例関係の顕在化に関する一考察, 日本数学教育学会誌 第96巻第4号, pp.4-15 査読有り

田端輝彦 (2014), 割合(倍)の見方で数量関係を把握した結果を分数で表現する, 算数授業研究 vol.92, 東洋館出版社, pp.48-51 査読無し

田端輝彦 (2013), 除法の意味理解を深めるための図とその指導の重点について, 算数授業研究 vol.89, 東洋館出版社, pp.24-27 査読無し

田端輝彦 (2013), 同種の量の割合の指導改善, 単位量あたりの大きさの考えと割合の考えの違いを明確にして, 初等教育資料 No.902, 東洋館出版社, pp.49-51 査読無し

田端輝彦 (2012), 割合のつまずきに関する一考察 - 全国学力・学習状況調査の結果をもとに -, 続・新しい算数数学教育の実践を目指して, 杉山吉茂先生喜寿お祝い記念論文集, 東洋館出版社, pp.71-80 査読無し

田端輝彦 (2012), 割合の本質にせまる, 算数授業研究 vol.83, 東洋館出版社, pp.12-15 査読無し

田端輝彦 (2012), 比(倍)の三用法のつまずきに関する一考察 - 全国学力・学習状況調査の結果からみて -, 第45回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp.45-50 査読無し

田端輝彦 (2012), 比例式の指導に関する一考察 - 小学校算数と中学校数学を接続する視点からみて -, 第45回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp.641-646 査読有り

田端輝彦 (2012), 言語活動の充実とその評価のあり方 - 数直線を読むことを重視した分数の乗除法の指導を通して -, 研究紀要第41号(平成23年度), 日本教材文化研究財団, pp.29-33 査読無し

田端輝彦 (2011), 昭和30年代の割合論争における量 $\times$ 割合と量 $\times$ 量の意味とその拡張の仕方について, 算数授業研究 vol.80, 東洋館出版社, pp.16-19 査読無し

田端輝彦, 石田雄一 (2011), 分数の乗除法の演算決定に関する一考察 - 数直線を用いた指導を通して -, 第44回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp.411-416 査読有り

(学会発表)(計4件)

小野雄祐，田端輝彦，市川啓，高橋丈夫  
(2014)，比と比例式の学習指導に関する一  
考察，日本数学教育学会主催，第47回秋  
期研究大会，2014年11月8日9日，熊本  
大学(熊本県熊本市)

田端輝彦(2012)，比(倍)の三用法のつ  
まずきに関する一考察 - 全国学力・学習状  
況調査の結果からみて - ，日本数学教育学  
会主催，第45回数学教育論文発表会，2012  
年11月10日11日，奈良教育大学(奈良県  
奈良市)

田端輝彦(2012)，比例式の指導に関する  
一考察 小学校算数と中学校数学を接続  
する視点からみて ，日本数学教育学会主  
催，第45回数学教育論文発表会，2012年  
11月10日11日，奈良教育大学(奈良県奈  
良市)

田端輝彦，石田雄一(2011)，分数の乗除  
法の演算決定に関する一考察 - 数直線  
を用いた指導を通して - ，日本数学教育学  
会主催，第44回数学教育論文発表会，2011  
年11月12日13日，上越教育大学(新潟  
県上越市)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田端 輝彦 (TABATA Teruhiko)  
宮城教育大学・教育学部・教授  
研究者番号：80344745

### (2) 研究分担者

山田 春樹 (YAMADA Haruki)  
宮城教育大学・教育学部・教授  
(H23 H24：退職のため辞退)

研究者番号：00092578

中村 享史 (NAKAMURA Takashi)

山梨大学・教育学研究科・教授

研究者番号：70303394

中野 博之 (NAKANO Hiroshi)

弘前大学・教育学部・教授

研究者番号：30400120

市川 啓 (ICHIKAWA Hiraku)

山形大学・地域教育文化学部・准教授

研究者番号：20624745

(H23 H24：研究協力者から研究分  
担者)