

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 23 日現在

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23501110

研究課題名(和文)幾何的論証能力向上のためにパソコンを活用する学習指導法の研究

研究課題名(英文) Study of geometry teaching methods that take advantage of the personal computer to encourage the development of ability of students to make geometrical proof

研究代表者

中野 俊幸 (NAKANO, Toshiyuki)

高知大学・教育研究部人文社会科学系・教授

研究者番号：20284424

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円、(間接経費) 840,000円

研究成果の概要(和文)：幾何的論証能力の向上は、幾何的図を「実体」から「記号」と捉えられようになることと関連していると考えられる。本調査で、中学生2年生では、まだ半数の生徒が「記号」と捉えられていないことが分かった。幾何的論証能力の向上に資する幾何授業でのパソコン活用方法を、「説明の教具として」「課題を発展させる教具として」「発見の文脈をつくる教具として」の3つの方向から考案し、教材を開発し授業実践を行ってその有効性を検証した。

研究成果の概要(英文)：I considered that the development of ability of students to make geometrical proof involves what they regard the geometrical graphic as, from as a "entity" to as a "symbol". This research reveal that half of the 2 grade junior high school students cannot regard the geometrical graphic as a "symbol" than as a "entity". From the point of view of three types of mathematics teaching tools, "a teaching tool of explanation", "a teaching tool to develop problem", "a teaching tool to create a context of discovery", I developed the teaching methods that take advantage of the personal computer to encourage the development of ability of students to make geometrical proof. The research in teaching practice on these teaching methods with personal computer verified its educational effectiveness.

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：科学教育・教育工学・教育工学

キーワード：カリキュラム 教授法開発 幾何学習指導 論証指導 パソコンの活用

1. 研究開始当初の背景

中学校での「証明」の段階では、考察の対象は、具体物の形ではなく、形が持っている性質の関係である。性質の関係が生徒に問題として理解されるためには、図形を性質の集合体と捉えられていなくてはならない。さらに、その性質の関係は、論理によらなければ確かめられないということが意識されて初めて、「証明」の必要性が理解できるのである。つまり、「証明」の意義が理解されるためには、「図」を使った観察・実測では予測は出来ても確証は出来ないことが理解されなければならない。

そこでは、「図」は、「実体」ではなく実体を表すための「記号」にすぎないと考えられていなければならない。「図」が「実体」ではなく、むしろ幾何的性質を表現する「規約的記号」にすぎないと捉えられるとき、ある性質の確証は、性質間の演繹関係によってのみ根拠づけられることになるからである。

幾何的図を「実体」ではなく「記号」とみることが出来るかが、幾何的証明の意義の理解と証明構成能力に深く関わっていると言うのが、本研究の第1の仮説である。そして「実体」から「記号」へ図の捉え方を転換させるためには、パソコンの幾何的シミュレーション・ソフトの活用が有効であるというのが、本研究の第2の仮説である。

2. 研究の目的

(1) 幾何的図の捉え方と幾何的論証能力との関係

幾何的図を「実体」ではなく「記号」とみることが出来るかが、幾何的証明の構成能力と正の相関性があることを明らかにすることが本研究の第1目的である。

(2) パソコンを活用した幾何授業の開発

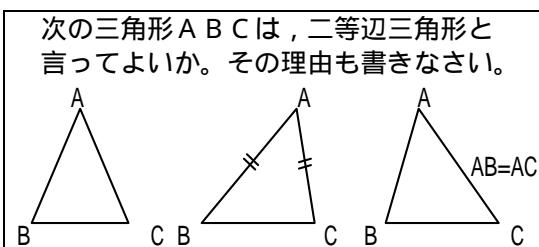
本研究の第2の目的は、「実体」から「記号」へ図の捉え方を転換させるためには、パソコンの幾何的シミュレーション・ソフトの活用が有効であることを検証することである。このため、パソコン活用を前提とした中学校の幾何の教材と授業を開発することが目標である。

3. 研究の方法

(1) 幾何的図の捉え方の調査

図的表記を、実体と捉えるか、あるいは、記号と捉えているかを知るには、次のような問いで図的表記の類似的有契性と規約性のどちらをより信頼できると考えているか観ればよい。なお、図は、できるだけ精確に $AB = AC$ となるよう描いているが、等辺であることを示す印を付していない。これに対し図は、あえて等辺にならないよう描いておきながら、等辺であることを示す印や説明を付

している。



中学生の生徒を対象にして、このような質問紙でアンケート調査し、また、幾何的論証に関わる問題に対する解答の成績との相関性を観ることで、両者の関連性の仮説を検証し、記号論的転換を幾何的論証能力向上の指標として同定する。

(2) パソコンを活用する中学校の幾何の教材と授業の開発

パソコン活用を前提とした中学校の幾何の教材と授業の開発については、中学校現場教師の協力を得ながら、幾何的シミュレーション・ソフト Cbri を活用する教材および授業構成とその指導法を開発し、通常の教室で授業実践できるように、生徒4人に1台程度の数のノートパソコンと全体提示用のプロジェクター等を準備して授業実践を行う。そして、そのような教材と指導法の幾何的論証能力向上の有効性を検証する。

4. 研究成果

(1) 幾何的図の捉え方の調査結果

幾何的図を「実体」ではなく「記号」とみることが出来るかの調査は、中学2年生を対象に証明の学習している3学期に、年度を替えて2回行った。

第1回目の調査では、52名の質問紙のデータと幾何に関する成績のデータが得られたが、質問紙に対し、ほとんどの生徒が、図を二等辺三角形と言ってよいと答えており、図と答えた者は、3名で、そのうち図のみを二等辺三角形と言ってよいと答えた者は、1名だけであった。これは、中学校段階の生徒が小学生よりも図的表記の規約性を優先させていることを示唆しているとも考えられるが、むしろ、質問紙の図に問題があったと考えられる。その問題は、調査用紙の図の三角形は、一応等辺にならないように描いたが、「あまり極端にならないようにする」という余計な配慮をしたことによるものである。二等辺からあまり極端に歪ませないようにしたため、図にも類似的有契性が残り、規約性との対立が鮮明にならず、類似的有契性ととも規約性のある図の方をより信頼できる図として選択したと考えられる。

第1回目の調査では、それぞれの生徒の幾何に関する成績のデータも得られたが、上記のことから相関性は分析できなかった。

第2回目の調査では、質問紙の図の三

角形を二等辺三角形からかなり歪んだ形とし、類似的有契性と規約性との対立を明確なものとした。69名のデータが得られ、結果は次の通りとなった。

選択		と	その他
人数	20	43	15
割合	26%	55%	19%

この表の「その他」は、 \triangle の単独かと、 \triangle と \triangle との選択をした者である。

\triangle を選択した中学生は、理由として、「 \triangle は見た目では判断できない、 \triangle は等しいことが示してある」と明確に記述しており、図の類似的有契性よりも規約性を優先していることが分かる。つまり、図を「実体」よりも「記号」と捉えていることが示唆される。そのような生徒がおよそ過半数55%であった。

一方、 \triangle を選択した生徒は、「 \triangle は辺が等しくない」と言ったような理由を記述している者が多く、見た目、つまり図の類似的有契性を優先しており、図を未だ「実体」と捉えていることが示唆される。そのような生徒が26%であった。

さらに、「その他」を選択した生徒は、その理由などから図の類似的有契性と規約性のどちらを優先すべきかの判断が明確にできていないことが示唆され、図を明確に「記号」として捉えることができていないことが分かった。そのような生徒がおよそ2割である。

以上のことから、中学2年生3学期の時期において、図を「実体」よりも「記号」と明確に捉えられている者と、そうでない者は、この質問紙のどの図を二等辺三角形と考えてよいかの問いで峻別可能であることが示唆された。そして、中学2年生修了段階におけるその割合は、およそ半々であることが示唆され、論証能力との関連性は興味深い探求事項となった。

しかし、幾何的図を「実体」ではなく「記号」と捉えることが出来るかと、幾何的論証能力との相関性については、第2回目に調査した生徒の幾何に関する成績については、学校現場の事情からのデータ数が十分得ることができなかったため、数量的解析をすることができなかった。

(2) パソコンを活用する中学校の幾何の教材と授業の開発と実践

図形指導におけるPC活用法については、「説明の教具として」「問題を発展的に捉えさせる教具として」「新しい性質や課題を発見する文脈をつくるための教具として」の3つの方向から活用を考案した。

説明の教具としての活用

これは、数学的教具の説明性の面から考えたパソコンの活用方法である。パソコンを使って図形を動的に提示することで、その不変性や共変性として図形の性質を理解させよう

とするものである。不変性・共変性は、線分の長さや角の大きさとして現れるが、見た目だけでは認識されにくい場合もある。そのときはCabriの測定機能を使って、長さや角の大きさを具体的な数値で示すことにより、より説得力をもって示すことができると考えた。

【実践事例1】平行線の錯角、同位角の関係を動的に、角度を数値で表示して掲示する。

【実践事例2】平行線と「くの字」の折れ線が交わる時、なす角は平行線との角の和になることを動的に示したのち、同側内角の和が 180° になることを「くの字」の特殊な場合として関連づけた。

このような図形を動的に示す活動は、どこを動かしてどこを固定しているか、変化と不変性を生徒に明確に意識させることにつながる。そして、不変にしている性質をさらに変えたらどうなるかという課題意識を喚起することができる。上記の【実践事例1】では、「平行線の同側内角の和の場合、平行線でなかったらどうなるか」という課題を生徒が】自主的に発想し、この課題をCabriで探求させることにより「平行線の同側内角の和は 180° 。」という定理を、「平行線でなくても、同側内角の和が一定である」という性質に一般化させることができた。

問題を発展的に捉えさせる教具としての活用

これは、数学的教具の課題性の面から考えたパソコンの活用方法である。教科書に載っている例題や練習問題に対して、その図をCabriで作図し、移動・変形を施すことにより、発展的な課題や一般性をより積極的に考えさせようとするものである。

【実践事例3】下記のような2つの正三角形の頂点を結ぶ線分(ナポレオン線)の等長性の証明において、2つの正三角形を動かし、その位置関係と証明の陳述との対応を考察させた。

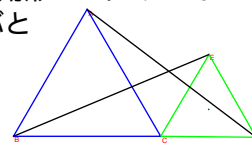
正三角形ABCと正三角形EDCにおいて

AとD、BとEを結ぶと

AD=BEが成り立つ。

このことを

証明しなさい。



上記の定理は、2つの正三角形の大きさや位置関係は変わっても、2つの線分の長さが常に等しいことを陳述している。Cabriを使うことで、正三角形の大きさや位置関係を自由に変えることができるので、この変化の中の不変性を視覚的現象として示すことができる。

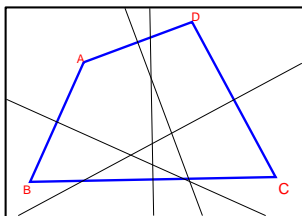
また、正三角形の位置関係によって証明の陳述が変更される部分と不変な部分との対応を考察させることができた。これは証明の変数性を意識させることに繋がったと考えられる。

新しい性質や課題を発見する文脈をつくるための教具としての活用

これは教科書の内容や取り扱い方にとらわれず、パソコンの教具としての課題性をより効果的に発揮させて、探求的活動の思考道具として Cabri を活用しようとするものである。

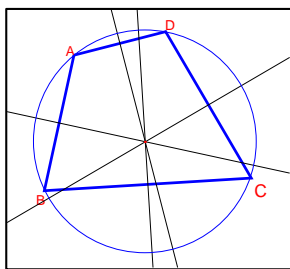
【実践事例4】三角形の外心の発見から四角形への発展：まず，三角形の3辺の垂直二等分線と外心との関係を動的に考察させ、そして、その考察を三角形から四角形へと発展させ、新しい性質を発見させた。なお，三角形から四角形への課題の発展はArzarello, F (2000). "Inside and Outside: Spaces, Times and Language in Proof Production", in Proceeding of the 24th Conference of PME の実践を参考にしている。

三角形の場合は3辺の垂直二等分線は1点で交わるが、四角形の場合は右図のように必ずしも1点で交わらない。



授業では、この事を生徒に確認させた後、1点で交わる場合、四角形はどんな条件を満たすかをさらなる探求課題として設定した。そして、4辺の垂直二等分が1点で交わるようにパソコンを操作させた。

三角形の場合は3辺の垂直二等分線の交点が外心になったことから、四角形の場合も4辺の垂直二等分線が1点で交わるならば、この交点を中心とする四角形の外接円がかけること、つまり、四角形は円に内接していることを予想させた後、右図のように、外接円をかかせて確かめさせた。



授業の最後に、以上の探求活動を三角形と四角形を対比して、次のように表にまとめた。

	三角形	四角形
各辺の垂直二等分線	必ず1点で交わる(外心)	1点で交わるとは限らない
外接円	必ずかける 三角形は円に内接する	かけるとは限らない 1点で交わる時には外接円がかける

三角形から四角形へと発展させたことにより、三角形の3辺の垂直二等分線が1点で交わり外心になることが多角形の中で如何に特別な性質なのかを生徒に理解させることができた。

(3)パソコンの活用と幾何的論証能力向上との関係について

説明の教具としての活用

平行線の錯角・同位角の相等性や同側内角の関係などは、従来は一つの図で暗記させるだけであった。これに対し、説明の教具として活用する授業では、図形を動かすことで、角の関係や性質を、固定された一つの図での事象ではなく、平行線という条件を保ったまま図を変化させたときの「不変性」として捉えさせることができた。また、不変性に着目させることで、ある図を連続的に変化させる中の一つの特例な場合と捉えさせたり、平行と言う条件を崩した場合でも関係が保てるかを考察させることができ、図形の性質を一般化・特殊化との関係で捉えさせることができた。

幾何的証明の思考は、図形の性質間の関係について、その条件や性質の包摂関係によって考察するものである。その包摂関係とは、図形の性質を一般化・特殊化との関係で捉えていくことに他ならない。上記のように、パソコンを活用することで論証活動の基礎となる思考活動を明確な形で行うことができたのである。

問題を発展的に捉えさせる教具としての活用

問題を発展的に捉えさせる教具として活用する授業では、教科書の問題に示されている定理をより発展的・より一般的視点から考えさせることができた。また、図を変化させても証明の記述は同じであることから、証明の記述が、固定された一つの図について語っているのではなく、ある条件を満たすすべての図について語っているという証明の「全称性」を意識させることができた。さらに、図の場合分けと証明記述の変化との対応を考察させることができた。定理を成立させている不変な性質と場合分けにもなって変わってくる共変な性質が、証明記述の共通部分と相違点に現れているという論証としては高度な内容を考察させることができた。

新しい性質や課題を発見する文脈をつくるための教具としての活用

新しい性質や課題を発見する文脈をつくるための教具として活用する授業では、生徒に自発的な図形性質の予想や課題設定を促すこ

とができ、また、Cabri のトレース機能や作図機能を使って実験・検証する活動を展開することができた。

論証は、命題を確証する文脈であるが、その活動を生徒に積極的・自主的に取りまわせることが論証能力の向上に繋がることは明らかである。論証活動を生徒に積極的・自主的に取りまさせるには、証明する新しい性質や課題を発見する文脈を設定することが最も効果的である。

そのような発見の文脈を設定し、生徒の自発的な図形性質の予想や課題設定をもとに授業を展開することは、生徒の主体的学習の理想であっても、実現はなかなか難しいと考えている。そうした授業が展開できたことは、本実践研究の最大の成果と考えている。

5．主な発表論文等

〔学会発表〕(計 1 件)

中野俊幸，小松洋子，濱田淳一，中学校の図形指導における PC シミュレーション・ソフトの活用について，第 17 回 T3 Japan 年会，2013.8.24-25 ，東京理科大学

6．研究組織

(1)研究代表者

中野 俊幸 (NAKANO, Toshiyuki)

高知大学・教育研究部人文社会科学系・教授

研究者番号：20284424