

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23510166

研究課題名(和文) 最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対する近似アルゴリズムの開発

研究課題名(英文) Development of Approximation Algorithms for the Shapley Value of Minimum Cost Spanning Tree Games

研究代表者

安藤 和敏 (Ando, Kazutoshi)

静岡大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：00312819

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000 円、(間接経費) 840,000 円

研究成果の概要(和文)：本研究では最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対する二つの近似アルゴリズムを開発した。一つ目はサンプリング・アルゴリズムであり、このアルゴリズムは擬多項式時間で与えられた近似精度を満たす Shapley 値の近似値を高確率で出力する。もう一つの近似アルゴリズムは、与えられた任意の費用関数を木距離で近似し、この近似された費用関数によって定義される最小費用全域木ゲームの Shapley 値を元の費用関数によって定義される最小費用全域木ゲームの Shapley 値の近似値とする。数値実験によって、後者の近似アルゴリズムは費用関数が木距離に近いときには高い近似精度が達成できることが示された。

研究成果の概要(英文)：In this research, we developed two algorithms for computing the Shapley value of minimum cost spanning tree games. The first one is a randomized algorithm which, given an arbitrary minimum cost spanning tree game, outputs an approximation of its Shapley value with given precision in pseudo-polynomial time. Given a minimum cost spanning tree game, the other algorithm first approximates the cost function of the associated game by a tree metric and then it computes the exact Shapley value of the game associated with the approximated cost function. Numerical experiments show that the latter algorithm performs well when the given cost function is close to a tree metric.

研究分野：複合新領域

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学・社会システム工学・安全システム

キーワード：ゲーム理論 オペレーションズ・リサーチ アルゴリズム 組合せ最適化 離散数学

1. 研究開始当初の背景

(1) 協力ゲーム理論における中心的課題は、プレーヤー全体として負担する費用を各プレーヤーにどのように配分するかということである。各プレーヤーへの費用配分を指定する方法はゲームの解と呼ばれる。Shapley 値はゲームの解の中で最も重要なもののうちの一つであり、経済学的な観点から多くの研究がなされている。最小費用全域木ゲームは協力ゲームの一つであり、通信網構築などの状況においてユーザ間での適切な費用配分法を分析するためのゲーム理論的モデルである。最小費用全域木ゲームにおいては、プレーヤーの集合 $N = \{1, \dots, n\}$ に加えて供給者 0 が存在して、各エージェント間にリンクを構成するための費用を指定する費用関数と呼ばれる非負実数値関数 $w: N' \times N' \rightarrow R_+$ が与えられている。ここで、 $N' = N \cup \{0\}$ である。任意のプレーヤーの提携 $S \subseteq N'$ に対して特性関数値 $c(S)$ は S 中のプレーヤー同士、あるいは、 S 中のプレーヤーと供給者 0 とを結ぶことによって構成される最小費用全域木の費用として与えられる。上で述べたように現実的な応用問題を考える上では最小費用全域木ゲームの Shapley 値の効率的な計算が重要であるが、最小費用全域木ゲームの Shapley 値の計算は現実的に困難であることが示されている。したがって、効率的に計算が可能でかつ精度の高い近似値の計算が次善の策となる。

(2) 一般の最小費用全域木ゲームの Shapley 値の求解が困難である一方で、与えられた費用関数 $w: N' \times N' \rightarrow R_+$ が特別な性質を満たしているときには、関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値は多項式時間で求めることができる。費用関数 w は、任意の $i, j, k \in N'$ に対して、 $w(i, k) \leq \max\{w(i, j), w(j, k)\}$ を満たすとき、超距離と呼ばれる。費用関数が超距離である場合には、関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対する $O(n^2)$ 時間アルゴリズムの存在が知られている。費用関数 w は、任意の $i, j, k, l \in N'$ に対して $w(i, j) + w(k, l) \leq \max\{w(i, k) + w(j, l), w(i, l) + w(j, k)\}$ が成り立つとき、木距離である。費用関数が木距離である場合には、関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値は、 $O(n^4)$ 時間で計算可能であることが知られている。

2. 研究の目的

(1) 関連する費用関数が超距離あるいは木距離である最小費用全域木ゲームの Shapley 値の計算に対する多項式時間アルゴリズムをコンピュータ・プログラムに実装する。さらに、超距離と木距離を含むより一般的な費用関数に対して、関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値を計算する多項式時間アルゴリズムを開発し、それをコンピュータ・プログラムで実装する。

(2) 一般の協力ゲームの Shapley 値の近似アルゴリズムとしては、サンプリングによるものが知られている。申請者は、最小費用全域木ゲームの Shapley 値を計算するための新しい近似アルゴリズムを開発する。このアルゴリズムによって得られた近似値の近似精度を検証する。

3. 研究の方法

(1) 関連する費用関数が木距離であるような最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対する多項式時間アルゴリズムの実装を行う。さらに、数値実験によって開発したプログラムの実際の効率性についての検証を行う。ここで開発されたプログラムは次に述べる近似アルゴリズムのプログラムにおけるサブルーチンとして用いられる。

(2) 新しい近似アルゴリズムのアイデアは以下の通りである。まず、与えられた費用関数 w を木距離で近似したものを w' とする。次に、 w' に関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値を厳密（これは多項式時間で計算可能である）に計算し、これをもって、 w に関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値の近似値とする。

このアルゴリズムにおける最も重要なステップは、任意の費用関数 w を木距離 w' で近似することである。木距離による近似に対してはいくつかの候補がある。代表的なものに、Buneman 木、Neighbor Joining などあり、これらは効率的に計算することが可能である。これらの計算アルゴリズムについてのサーベイを行った後、Shapley 値の新しい近似アルゴリズムのコンピュータ・プログラムへのコーディングを行う。このときに、研究方法 (1) で開発したプログラムを用いて近似された費用関数 w' に関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値を求める。さらに、その近似精度の検証を数値実験によって行う。

4. 研究成果

(1) 与えられた費用関数が超距離または木距離であるような最小費用全域木ゲームの Shapley 値を計算する多項式時間アルゴリズムをコンピュータ・プログラムによって実装した。さらに数値実験によって、実装したプログラムの実際の効率性を測定した。その結果、アルゴリズムの実際の計算量は理論的計算量とほぼ同じオーダーであることが確認された。

(2) これまでに、一般の協力ゲームの Shapley 値に対してサンプリングによる近似アルゴリズムが提案されていたが、最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対しては、与えられた精度を達成する近似解を得るためには、どれだけのサンプルを得る必要があるかという分析は存在していなかった。本研究

で筆者は、与えられた任意の近似精度 $\epsilon > 0$ に対して $1 - \epsilon$ -ノルムに関する誤差が ϵ 以下であるような Shapley 値の近似値を $3/4$ 以上の確率で出力する $O(n^6 \epsilon^{-2})$ 時間アルゴリズムとしてサンプリング・アルゴリズムを定式化した。ここで、 $w(i, j)$ は $w(i, j)$ の最大値である。また、費用関数が $\{0, 1\}$ -関数である場合にはこのアルゴリズムの計算量は $O(n^5 \epsilon^{-2})$ とすることができる。

図1は、プレイヤーの数 $n=100$ の $\{0, 1\}$ -費用関数によって定義される最小費用全域木ゲームを入力としたときに、アルゴリズムの出力が与えられた精度 $\epsilon=0.01$ を達成する確率を実験的に求めたものである。理論的に必要なサンプル数 m は 10^8 であるのに対して、この実験では $m=80,000$ で $3/4$ の確率を達成していることが確認された。

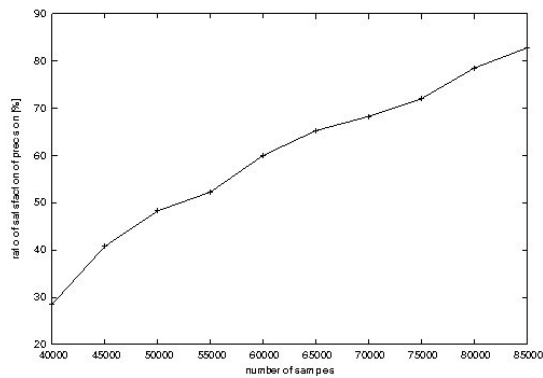


図1

図2は、プレイヤー数 $n=100$ の一般の費用関数によって定義される最小費用全域木ゲームを入力としたときに、アルゴリズムの出力が与えられた精度 $\epsilon=1$ を達成する確率を実験的に求めたものである。その精度を確率 $3/4$ で達成する理論的に必要なサンプル数 m は 10^{10} であるのに対して、この実験では $m=7,000$ でその確率を達成していることが確認された。

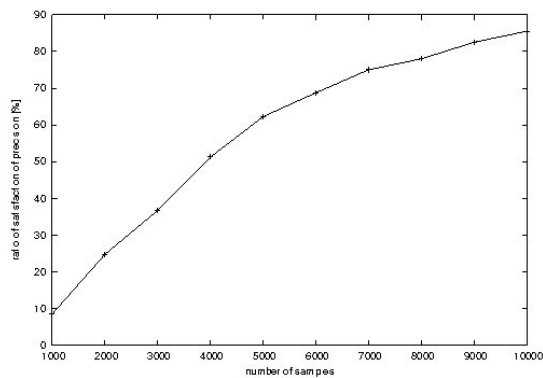


図2

(3) 最小費用全域木ゲームは、それを定義するネットワークの費用関数が木距離である場合には Shapley 値に対する多項式時間

アルゴリズムが存在する。このことを利用して筆者は最小費用全域木ゲームに対する新しいアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムは、与えられた任意の費用関数を木距離で近似し、この近似された費用関数によって定義される最小費用全域木ゲームの Shapley 値を元の費用関数によって定義される最小費用全域木ゲームの Shapley 値の近似値とする。

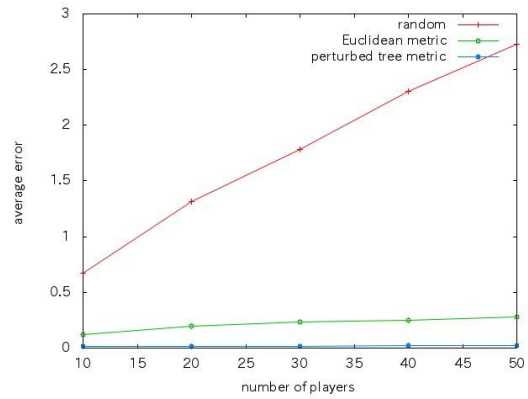


図3

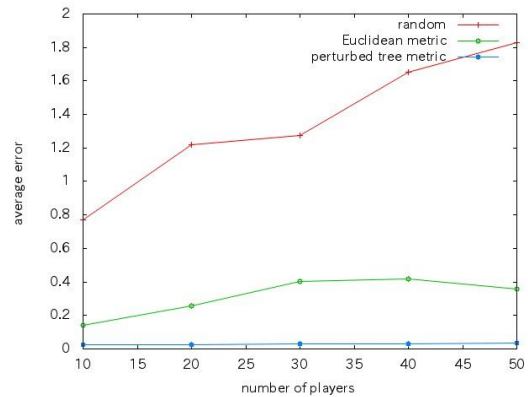


図4

数値実験では費用関数のタイプとして、ランダム (random)、ユークリッド距離 (Euclidean metric)、摂動木距離 (perturbed tree metric) を用意した。図3はこれら3つの費用関数のタイプに対して近似アルゴリズムの出力の相対誤差 ($1 - \text{ノルム}$) を、プレイヤーの数 $n=10, 20, 30, 40, 50$ に対してプロットしたものである。ここで、相対誤差はランダムに生成された10個の費用関数のそれぞれに対して近似アルゴリズムによって得られた Shapley 値の近似値の相対誤差の平均である。誤差の推定のためには Shapley 値の真値が必要であるが、真値の計算は実際上不可能であるため研究成果(2)で得られたサンプリング・アルゴリズムの出力を真値の代わりに用いた。また、Shapley 値の近似値の計算のために、研究成果(1)で開発したプログラムを用い、費用関数を木距離で近似するためのアルゴリズムとして、Neighbor Joining

を使用した。

同様に、図4は ℓ_1 -ノルムに関する近似アルゴリズムの相対誤差を示している。これらの数値実験によって、この近似アルゴリズムは与えられた費用関数が木距離に近ければ近いほど高い近似精度が達成できることが示された。

(4) 上記の(3)で述べた近似アルゴリズムにおいて、任意の費用関数を木距離によって近似するアルゴリズムが必要である。このアルゴリズムの候補としては複数のあるが、その中に Buneman 木による方法がある。Buneman 木による方法では、与えられた費用関数から交叉集合族を生成し、この交叉集合族を表現する木を構築する。(ここで、 N' の部分集合族 F が交叉集合族であるとは、任意の $S, T \in F$ に対して $S \cap T = \emptyset$ 、 $S \cup T \in F$ 、または、 $S \cap T = N'$ が成り立つことである。) この木を構築するアルゴリズムとしてツリーポッピング・アルゴリズムが良く知られているが、本研究においてツリーポッピング・アルゴリズムの二つの変種を導入した。これらの変種の元のアルゴリズムからの違いは、前処理として交叉集合族を降順あるいは昇順にソートするという点だけである。これらの変種の計算時間は元のツリーポッピング・アルゴリズムと同じであるが、実装が非常に容易であること、及び、正当性の証明が簡単であるという利点を持つ。数値実験の結果、これらのアルゴリズムは既存のアルゴリズムの計算時間とほぼ同じであるかやや高速であることが確認された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

K. Ando, Computation of the Shapley value of minimum cost spanning tree games: #P-hardness and polynomial cases, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有、Vol. 29, No. 3, 2012, pp. 385 - 400

K. Ando, A. Kai, Y. Maeda and K. Sekitani, Least distance based inefficient measures on the Pareto-efficient frontier in DEA, Journal of the Operations Research Society of Japan, 査読有、Vol. 55, No. 1, 2012, pp. 73 - 91

[学会発表](計 7 件)

安藤 和敏、徳武忠俊、系統樹構成問題に対するツリーポッピング・アルゴリズムの2つの変種、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2014 年春季研究発表会、2014 年 03 月 06 日~2014 年 03 月 07 日、大阪大学(大阪府)

安藤和敏、徳武忠俊、最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対するサンプリングによる近似アルゴリズム、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2013 年春季研究発表会、2013 年 03 月 05 日~2013 年 03 月 06 日、東京大学(東京都)

安藤和敏、山田悠一郎、非凸エネルギー関数最小化に対するプライマル・アルゴリズムの適用、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2013 年春季研究発表会、2013 年 03 月 05 日~2013 年 03 月 06 日、東京大学(東京都)

K. Ando, Computation of the Shapley Value of Minimum Cost Spanning Tree Games: #P-Hardness and Polynomial Cases, The 21st International Symposium on Mathematical Programming, 2012 年 08 月 19 日~2012 年 08 月 24 日、ベルリン工科大学(ドイツ)

安藤和敏、徳武忠俊、最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対する近似手法の提案とその近似精度の実験的評価、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2012 年春季研究発表会、2012 年 3 月 28 日、防衛大学校(神奈川県)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安藤 和敏 (ANDO, Kazutoshi)
静岡大学・工学研究科・准教授
研究者番号：00312819