様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０００４
研究課題名（和文）量子タイヒミュラー空間の視点による量子差分モノドロミー保存系の研究

研究課題名（英文）Quantum discrete isomonodromy system from the viewpoint of quantum Teichmueller spac
e

研究代表者
長谷川　浩司（Hasegawa, Koji）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：３０２０８４８３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円、（間接経費）　　1,140,000円

研究成果の概要（和文）：フックス型接続方程式のモノドロミー保存変形の量子差分化を量子離散タイヒミュラー空間上の系と捉えるため、パンルヴェVI型・ガルニエ系を量子差分化しつつ、時間発展をデーン捻りの量子化として理解し、量子群から構成される可解格子模型にもリーマン面の幾何の視点を導入すること、が目標であった.
そしてパンルヴェVI型や，Garnier 系の量子離散化の量子離散ソリトン系の周期簡約としての構成に成功し，本研究者によるこれまでのアフィンワイル群対称性に基づく構成とのよい一致を見た．高ランク版の場合も、自励版である Kashaev と Reshetikhin の量子離散戸田格子場模型の拡張として目処がついた、

研究成果の概要（英文）：The aim is to construct the quantum discretized version of the monodromy preserbing deformation of the Fuchsian equation as the system on the discretized Teichmueller space, so that one can recognize the Painleve VI system as well as the Garnier system as included into the picture, aiming that the construction will give the understanding of the symmetry structure as well as the viewpoint to the solvable lattice models from the theory of Riemann surfaces.
For this aim we have succeeded in the rank two case the construction of the quantum discrete version of the isomonodromy system using the periodically reduced system of the nonautonomous discrete quantum Toda field equation. The autonomous system has been studied by Kashaev and Reshetikhin, and our result is in good coincidence with our previous result using the Weyl group action approach.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：量子群

1.　研究開始当初の背景

可積分系において量子化（非可換化）および差分化（時空離散化）をともに行うのが量子差分化であるが、その中で次が観察された：「Faddeev-Volkov の量子差分サインゴルドン系を非自励的に拡張し，4 周期簡約を行うと，神保-坂井による差分パンルヴェ VI 型方程式の正準量子化が得られる（長谷川、2007)」

パンルヴェ VI 型方程式は 0,1,t,∞に確定特異点をもつ 2 階フックス型方程式のモノドロミー保存条件であり，4 点付リーマン球面のタイヒミュラー空間に住んでいる．差分 VI 型も同様である．上の観察から，量子差分パンルヴェ方程式および量子差分サインゴルドン方程式も，量子差分タイヒミュラー空間というべき幾何的対象と関係あることが期待される．

２．研究の目的

フックス型接続方程式のモノドロミー保存変形の量子差分化(非可換化＋離散化)を，量子離散タイヒミュラー空間上の系と捉え研究する．特に：

・パンルヴェ VI 型・ガルニエ系を量子差分化し，時間発展をデーン捻りの量子化として理解する．

・量子差分ガルニエ系の対称性の理解や τ 関数の量子化を，幾何的な観点から追求する．

・これらを通じて，量子群から構成される可解格子模型にリーマン面の幾何の視点を導入する．

3. 研究の方法

タイヒミュラー空間の量子離散化は Kashaev と Fock が 90 年代に定義している．彼らは物理学に現れたリーマン面上のリウビル方程式の量子離散化が動機で，それはデーン捻りの量子差分化として実現された．リウビル方程式はサインゴルドン方程式の極限とみなせ，可解格子模型は一般に後者の量子化を扱う枠組みである．そこで上に期待される関係は、量子差分タイヒミュラー空間と可解格子模型との関係として実現され、量子群のランクを上げて考えることで、高ランクの方程式の変形にあたる場合も扱うことができるであろうと考えた。

また関連して、量子差分化されたパンルヴェ型方程式における τ 関数の概念も、構造の理解の上で重要であると考えた。

４．研究成果

長谷川は、パンルヴェ VI 型を含む、ガルニエ系およびランクの高い場合の接続型方程式の変形問題を量子差分化することに成功した。実際には、普遍 R 行列からしかるべくこのような構造を導くための表現の取り方などが問題となった．

ただし、パンルヴェ VI 型の場合のワイル群作用や、一般の場合の対称性の理解にはまだ課題が残っている。量子差分タイヒミュラー空間というべき幾何的対象と関係あるだろう，と期待される．

黒木は、対称化可能一般 Cartan 行列に付随する Weyl 群双有理作用とその τ 函数の正準量子化を構成することに成功した。実際には古典の場合に τ 函数の Poisson 括弧が定義されていなかったので､古典の場合の τ 函数を含めた適切な Poisson 構造を見付けるという問題も同時に解いていることになる．

古典の場合も量子の場合も τ 函数は τ 変数への Weyl 群双有理作用の結果として定義される． 量子の場合には τ 変数を含む代数の適切な非可換性を発見しなければいけなかった.基本ウェイトに対応する τ 変数は余ルート(パラメーター変数とみなされる)の正準共役の指数函数(パラメーター変数を 1 ずらす差分作用素)であるというのが正しい解答であった．

Weyl 群の作用は Chevalley 生成元(パンルヴェ系の従属変数とみなされる)
のパラメーター変数べきの作用で自然に定義される作用が Weyl 群の関係式を満たすことは表現論的には Verma 関係式そのものである.
以上のようにして量子化された τ 函数が古典の場合と同様に正則性を持つかどうかが最初の問題になった. 以上の設定では量子 τ 函数が従属変数の多項式になるという結果を示すことが問題である.
古典の場合の τ 函数の正則性は本質的にソリトンの佐藤理論から得られる.
可換な場合には行列式はその成分の多項式になることから、古典 τ 函数の多項式性が導かれる.
この結果の量子版の証明は本質的に古典の場合と異なる.表現論における平行移動函手(translation functor)の理論から量子 τ 函数の正則性が導かれる.
この証明法では基本ウェイトに対応する τ 変数が実は基本ウェイトを最高ウェイトに持つ可積分表現による平行移動函手の「影」の一つに見えて来ることになる.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２　件）

① Koji Hasegawa
”Quantizing the Painleve VI equation: The Lax formalism.”
Lett. Math. Phys. 103 (2013) no.8, 865-879. **（有査読）**

② Koji Hasegawa
”Quantizing the Bäcklund transforma-tions of Painlevé equations and the quantum discrete Painlevé VI equa-tion”
Advanced Studies in Pure Mathematics 61“Exploration of New Structures and Natural Constructions in Mathematical Physics”, Japan Math. Soc. 2011, 275-288. （有査読）

〔学会発表〕（計　６　件）

① 黒木玄
「パンルヴェ系 τ 函数の量子化について」
2014 年 2 月 15 日、東京可積分系セミナー、東京大学数理科学研究科

② Koji Hasegawa
「量子離散ガルニエ系のラックス形式」
日本数学会秋季総合分科会、無限可積分系セッション一般講演、2013 年 9 月 24 日、愛媛大学

③ 黒木玄
互いに素な m，n に対する拡大アフィン Weyl 群の直積
$\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1})\times\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$
の双有理作用の量子化，
日本数学会，京都大学，2013 年 3 月 22 日

④ Koji Hasegawa
「量子離散パンルヴェ VI 型方程式のラックス形式」
日本数学会秋季総合分科会、無限可積分系セッション一般講演、2012 年 9 月 18 日、九州大学

⑤ 黒木玄
量子 Weyl 群双有理作用の Sato-Wilson 表示，
日本数学会「無限可積分系セッション」一般講演，九州大学伊都キャンパス， 2012 年 9 月 18 日

⑥ 黒木玄
Weyl 群双有理作用と τ 函数の量子化−量子化された τ 函数の正則性，

日本数学会「無限可積分系セッション」一般講演，東京理科大学神楽坂キャンパス，2012 年 3 月 28 日.

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

長谷川 浩司（Hasegawa Koji）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30208483

(2)研究分担者
(　　　)
研究者番号：

(3)連携研究者

黒木 玄（Kuroki Gen）
東北大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：10234593