

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：12613

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540009

研究課題名(和文)パラフェルミオン代数に付随する頂点作用素代数の研究

研究課題名(英文)Research on vertex operator algebras associated with parafermion algebras

研究代表者

山田 裕理(YAMADA, Hiromichi)

一橋大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：50134888

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円、(間接経費) 1,050,000円

研究成果の概要(和文)：階数1のA型アフィンリー代数の可積分表現のなす頂点作用素代数の部分代数として含まれるパラフェルミオン頂点作用素代数について、特異ベクトルから得られる情報に基づきその基本性質を詳細に検討し、既約加群の分類を完成させた。さらに、このパラフェルミオン頂点作用素代数がC2余有限であること、およびZhu代数の次元とC2代数の次元が一致することを証明した。また、階数nのA型ルート格子を2の平方根倍した格子から定義される頂点作用素代数の位数3の自己同型によるオービフォールドを研究し、その既約加群を分類するとともに、オービフォールドが有理的であることおよびC2余有限であることを証明した。

研究成果の概要(英文)：We study parafermion vertex operator algebras, which are subalgebras of integrable representations of affine Lie algebras of type A1. Using singular vectors, we classify the irreducible modules for the parafermion vertex operator algebras. Furthermore, C2-cofiniteness is established. It is proved that the dimension of Zhu's algebra coincides with that of C2 algebra. The orbifold of a lattice vertex operator algebra associated with a square root 2 times an ordinary root lattice of type An by an automorphism of order 3 is studied. We classify the irreducible modules for the orbifold. The rationality and C2-cofiniteness of the orbifold are also established.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：頂点作用素代数 パラフェルミオン代数 アフィンリー代数 W代数

1. 研究開始当初の背景

(1) パラフェルミオン代数の研究は、物理の共形場理論における Zamolodchikov-Fateev の論文(1985年)において始められた。それに引き続き、Gepner(1987年)および Gepner-Qiu(1987年)により、パラフェルミオン代数の分割関数がアフィンリー代数の可積分表現との関連で研究された。

(2) Lepowsky-Wilson(1981年および1984年)、Lepowsky-Primc(1985年)に見られるように、アフィンリー代数の可積分表現は数学の側でもほぼ同時期に様々な研究が行われている。Lepowskyらは、この一連の研究の過程で Z-代数の概念を導入した。Dong-Lepowskyはその著書(1993年)で、アフィンリー代数の可積分表現におけるハイゼンベルグ代数の真空空間を詳しく研究し、それが一般化された頂点代数の構造を持つことを示すとともに、Z-代数が本質的には Zamolodchikov-Fateev が導入したパラフェルミオン代数に他ならないことを証明した。これにより、パラフェルミオン代数を数学の側から研究する基礎が確立した。

(3) アフィンリー代数の可積分表現におけるハイゼンベルグ代数の真空空間は、一般化された頂点代数であるが、そこにおけるハイゼンベルグ代数のコミュタントは、パラフェルミオン頂点作用素代数と呼ばれる頂点作用素代数の構造を持つ。

(4) パラフェルミオン頂点作用素代数は、W代数の一種である。W代数は、主として物理において1980年代後半から1990年代中頃にかけて活発に研究された。

(5) 数学におけるパラフェルミオン頂点作用素代数の研究は、Dong-Lepowskyの著書以降10年間以上大きな進展がなかったが、Dong-Lam-Yamadaの論文(2009年)を契機として、現在活発に進められている。

2. 研究の目的

(1)最も基本的な階数1のA型アフィンリー代数のレベルkの可積分表現の場合、そのハイゼンベルグ代数のコミュタント、すなわちレベルkの A_1 型パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ は、階数k-1のA型ルート格子を基にして定義される頂点作用素代数の部分代数であることを、研究代表者は Ching Hung Lam との共著論文(2004年)で示した。モンスター単純群の2A元と拡大 E_8 ディンキン図形との関係を示唆する John McKay の予想を考察した Ching Hung Lam、山内博との共著論文(2005年および2007年)では、kが小さい場合のパラフェルミオン頂点作用素代数が重要な役割をする。このような経緯を踏まえ、研究代表者はパラフェルミオン頂点作用素代数 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ について、その構造および

既約表現に関する組織的な研究を開始した。

(2) これまでの研究成果として、Chongying Dong、Ching Hung Lamと共同で作用素積展開および特異ベクトルを決定したこと(2009年)、Chongying Dong、Ching Hung Lam、Qing Wangと共同で生成系を決定したこと、および特異ベクトルの性質を調べたこと(2010年)が挙げられる。本研究の目的は、パラフェルミオン頂点作用素代数の構造および既約表現をさらに詳しく調べ、パラフェルミオン頂点作用素代数に対する理解を一段と深めることであった。

(3) $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ の特異ベクトルは、Dong-Lam-Yamada(2009年)によりアフィンリー代数の記号を用いて具体的に記述されている。また、レベルkが6以下の場合には、パラフェルミオン頂点作用素代数の4個の元からなる生成系による特異ベクトルの表示も知られている。しかし、一般のレベルkの場合には、パラフェルミオン頂点作用素代数の生成系を用いて特異ベクトルを記述することは困難である。本研究では、 C_2 代数における生成系の像および特異ベクトルの像を調べることにより、 C_2 有限性を証明するために必要な情報を特異ベクトルから導くことを目標とした。

(4) Dong-Wang(2010年)は、階数1のA型アフィンリー代数の場合の結果に基づき、任意の有限次元単純リー代数に付随するアフィンリー代数の可積分表現の場合のパラフェルミオン頂点作用素代数を研究し、生成系などの基本的な性質に関する知見を得ている。本研究ではこれを発展させて、一般的な場合のパラフェルミオン頂点作用素代数の構造および既約表現を詳しく調べることとした。

3. 研究の方法

(1) 頂点作用素代数の基本性質を研究するためには、その生成系と作用素積展開、および特異ベクトルを詳しく知る必要がある。パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ については、4個のプライマリーベクトルからなる生成系と作用素積展開は Dong-Lam-Yamada(2009年)により調べられている。さらに、 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ の特異ベクトルをアフィンリー代数の記号を用いて表示することも知られている。しかし、 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ の4個の元からなる生成系を用いた特異ベクトルの表示は、レベルkが小さい場合を除いて知られていない。レベルkが一般の場合は、生成系により特異ベクトルを記述することは困難と考えられる。

(2) この障害を克服するために、特異ベクトルの C_2 代数における像に注目し、次のステップに分けて研究を行った。

C_2 代数は可換な結合代数であり、また

$K(\mathfrak{sl}_2, k)$ の4個の元からなる生成系の C_2 代数における像は、 C_2 代数の生成系になる。このことから、 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ の C_2 代数は4変数の多項式環の準同型像であることがわかる。

$K(\mathfrak{sl}_2, k)$ の4個の元からなる生成系の C_2 代数における像を用いて、特異ベクトルを具体的に記述する。

特異ベクトルの具体的な記述から、 C_2 代数を決定するために必要な情報を取り出す。

4. 研究成果

(1) 平成23年度では、レベル k の A_1 型パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ について、その表現論を整備するための第1段階として、 C_2 余有限性に関する研究を行い、次のような成果を得た。

null fieldを詳しく調べて、その C_2 代数における意味を明らかにした。

特異ベクトルの C_2 代数における像を、4つの生成元を用いて具体的に記述することに成功した。

null fieldと特異ベクトルの情報、および作用素積展開を基にして、パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ が C_2 余有限であることを証明した。

これらの研究成果を、ブルガリア科学アカデミーの国際研究集会(2011年6月21日)、台湾中央研究院の国際研究集会(2011年12月22日)、京都大学数理解析研究所の研究集会(2012年3月6日)で発表した。

(2) 平成24年度では、レベル k の A_1 型パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ について、その基本的な性質を詳しく検討し、次のような成果を得た。

$K(\mathfrak{sl}_2, k)$ の既約加群の分類を完成させた。さらに、 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ のZhu代数の次元と C_2 代数の次元が一致することを証明した。

\mathfrak{sl}_2 に限らず、任意の有限次元単純リー代数に付随するアフィンリー代数の可積分表現におけるハイゼンベルグ代数のコミュタントとして定義されるパラフェルミオン頂点作用素代数を考察し、それが C_2 余有限であることを証明した。

階数1のA型アフィンリー代数のレベル k の可積分表現のなす頂点作用素代数と、パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ との関係を解明した。

これらの研究成果を荒川知幸、Ching Hung Lamとの共著論文にまとめ、プレプリントサーバーにarXiv:1207.3909として公表した。また、上海交通大学の国際研究集会(2012年8月26日)、筑波大学の国際研究集会(2012年9月14日)、京都大学数理解析研究所の研究集会(2013年1月7日)で発表した。

(3) 平成25年度では、パラフェルミオン頂

点作用素代数 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ に関する荒川知幸、Ching Hung Lamとの共著論文が、Springer Proceedings in Mathematics & Statisticsに掲載された。

階数 n のA型ルート格子を2の平方根倍した格子から定義される頂点作用素代数の位数3の自己同型によるオービフォールドを研究し、その既約加群を分類するとともに、オービフォールドが有理的であることおよび C_2 余有限であることを証明した。この証明においては、レベル k が3の場合のパラフェルミオン頂点作用素代数 $K(\mathfrak{sl}_2, 3)$ 、およびそれと対になって現れる中心電荷が $6/5$ の W_3 代数の表現論が使われている。この研究結果をまとめた田辺頭一郎との共著論文が、Journal of the Mathematical Society of Japanに掲載された。

(4) 平成25年度ではさらに、パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ をその性質から特徴づけることにより、 W 代数との関係を明らかにすることができた。その結果を仙台市で開催された国際研究集会(2013年7月8日)で発表した。

(5) $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ の既約加群の分類結果を応用して、ある種のコードに付随する新しい頂点作用素代数を構成した。その成果を京都大学数理解析研究所の研究集会(2014年3月5日)、およびNational Dong Hua Universityの国際研究集会(2014年3月20日)で発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

K. Tanabe, H. Yamada, Fixed point subalgebras of lattice vertex operator algebras by an automorphism of order three, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, Vol. 65, 2013, pp. 1169-1242, DOI:10.2969/jmsj/06541169

T. Arakawa, C.H. Lam, H. Yamada, Singular vectors and Zhu's Poisson algebra of parafermion vertex operator algebras, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読無, Vol. 36, 2013, pp. 391-398, DOI:10.1007/978-4-431-54270-4

[学会発表](計14件)

山田裕理, Z_k -codes and vertex operator algebras, Hualien Workshop on Finite Groups, VOA, Algebraic Combinatorics and related topics, 2014年3月20日, National Dong Hua University, 台湾

山田裕理, Vertex operator algebras associated with Zk-codes, RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究」, 2014年3月5日, 京都大学数理解析研究所, 京都市

山田裕理, A characterization of parafermion vertex operator algebras, RIMS Camp-Style Seminar, Beyond the Moonshine, 2013年7月8日, ホテル華乃湯, 仙台市

山田裕理, Virasoro vectors of certain orbifolds, Taitung Workshop, 2013年3月26日, National Taitung University, 台湾

山田裕理, Conformal vectors in a certain orbifold, RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究」, 2013年1月7日, 京都大学数理解析研究所, 京都市

山田裕理, パラフェルミオン頂点作用素代数の Zhu 代数と C_2 代数, 日本数学会秋季総合分科会, 2012年9月19日, 九州大学, 福岡市

山田裕理, C_2 -cofiniteness of parafermion vertex operator algebras, Conference on Groups, VOAs and related Structures in Honor of Masahiko Miyamoto, 2012年9月14日, 筑波大学, つくば市

山田裕理, A characterization of parafermion vertex operator algebras, Seminar at Sichuan University, 2012年9月1日, Chengdu, 中国

山田裕理, Commutant and parafermion vertex operator algebras, Conference on Vertex Operator Algebras and Related Topics, 2012年8月26日, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 中国

山田裕理, パラフェルミオン頂点作用素代数の C_2 有限性, RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、組合せ論の研究」, 2012年3月6日, 京都大学数理解析研究所, 京都市

山田裕理, On parafermion vertex operator algebras, 研究集会「有限群と頂点作用素代数」, 2012年2月17日, 東京女子大学, 杉並区

山田裕理, Zhu's C_2 -algebra of

parafermion vertex operator algebras, Conference on Vertex Operator Algebras, Finite Groups and Related Topics, 2011年12月22日, Academia Sinica, 台湾

山田裕理, パラフェルミオン頂点作用素代数の C_2 代数, 第9回「代数学と計算」研究集会, 2011年11月8日, 首都大学東京, 八王子市

山田裕理, Singular vectors and Zhu's Poisson algebra of parafermion vertex operator algebras, International Workshop, Lie Theory and Its Applications in Physics, 2011年6月21日, Bulgarian Academy of Sciences, Varna, Bulgaria

〔その他〕

ホームページ等

https://hri.ad.hit-u.ac.jp/html/181_research_activity_ja.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 裕理 (YAMADA, Hiromichi)
一橋大学・大学院経済学研究科・教授
研究者番号: 50134888

(2) 研究協力者

荒川 知幸 (ARAKAWA, Tomoyuki)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号: 40377974

田辺 顕一郎 (TANABE, Kenichiro)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 10334038

Ching Hung Lam
Academia Sinica (台湾)・教授