

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：13501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540011

研究課題名(和文)群と組合せ論に関する数式処理およびその応用の研究

研究課題名(英文) A research on symbolic and algebraic computation of groups and combinatorics and its application

研究代表者

宮本 泉 (MIYAMOTO, Izumi)

山梨大学・医学工学総合研究部・教授

研究者番号：60126654

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円、(間接経費) 600,000円

研究成果の概要(和文)：コンピュータで、近似数値ではなく、正確な値あるいは数式などを求める計算を、総じて、数式処理という。アソシエーションスキームは統計学の実験計画法のデザインの1つであるが、群をきわめて自然に一般化した普遍的な性質をあわせ持つため、様々な数学との関連が明かされている。その分類にはコンピュータが必要で、その研究から発展して、置換群の数式処理や組合せ論などに関する研究成果を得た。上記スキームの一般化に対する数式処理の応用として、可移とは限らない置換群に対する正規化群および共役性計算の高速化の研究を行った。また、群からは得られないが2重可移群と類似のスキームを構成していくつかの組合せデザインを得た。

研究成果の概要(英文)：In a previous research I applied automorphism groups of association schemes to speed up the computation of normalizers of transitive groups. Automorphism groups of coherent configurations are related to the normalizers of permutation groups which may not be transitive. This time, I applied the m to speed up the computation of normalizers and testing conjugacy of subgroups of permutation groups which may not be transitive. Doubly transitive groups form a trivial association scheme same as those formed by symmetric groups. The action of a permutation group on t -tuples of points forms t -superscheme. A t -superscheme consists of partitions of k -tuples of a set of points for $k=1, 2, \dots, t$ satisfying certain conditions. Doubly transitive groups form 3-superschemes with only one partition on distinct 2-tuples of points. Using computers, we constructed such 3-superschemes of moderate size but not formed by doubly transitive groups and, as an application, obtained 2-designs from some of the schemes.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、代数学

キーワード：代数的数式処理 アソシエーションスキーム 置換群

1. 研究開始当初の背景

(1) アソシエーションスキームは統計学の実験計画法のデザイン (R.C.Bose and T.Shimamoto, J. Amer. Statist. Assoc. 47 (1952)) の 1 つであるが、群をきわめて自然に一般化した普遍的な性質をあわせ持つ。Delsarte (Philips Res. Rep. Suppl. 10 (1973)) によって符号やデザイン理論を統一して扱う枠組みとして紹介されて以来、種々のデザインを始め、数理物理学の共形場理論に於けるフュージョン代数や絡み目不変量を与えるスピンモデル、数理計画法の半正定値計画などとの関連が次々明らかにされている。また、その代数構造 (R.C.Bose and D.M.Mesner, Ann. Math. Statist. 30 (1959)) の研究は Terwilliger (J. Algebraic Combin. 1,2 (1992,1993)) へ続き発展している。国内においても坂内、伊藤の著書 Algebraic Combinatorics (1984) の後、盛んに研究されている。このように様々な方面から研究されているが、同型類の分類にはコンピュータの利用が必要で、それが本研究の端緒となっている。

(2) コンピュータで、近似数値ではなく、正確な値あるいは数式などを求める計算を、総じて、数式処理という。Mathematica、Maple をはじめ、多くの数式処理システムが開発され利用されている。本研究では、GAP システムを使って、数式処理アルゴリズムおよびその応用の研究を行う。

2. 研究の目的

アソシエーションスキームは辺彩色完全グラフであり、代数的な構造も持つことから様々な数学的対象と関係がある組合せ論の中心的な研究対象である。その分類には、組合せ論のさまざまな対象と同様にコンピュータを必要とする。本研究では、アソシエーションスキームに関連するコンピュータアルゴリズム (数式処理) の研究を基盤として行い、その数式処理の結果およびアルゴリズムをアソシエーションスキームと関係のある群、ブロックデザイン、符号などに応用することを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 本研究は、アソシエーションスキームの同型類分類 (A.Hanaki and I.Miyamoto, Classification of association schemes with small vertices, <http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/>) を計算する数式処理、すなわち、計算アルゴリズムの研究から発している。そして、研究目的に述べたような種々の研究に結びついていくことが分かってきた。したがって、研究計画・方法としては、数式処理における計算アルゴリズムの研究を基盤において、次に述べるように、各目的について研究して行く予定である。

(2) 数式処理の研究は、コンピュータを使用して計算実験を行いながら進める。その他、研究集会での情報収集が必要になる。コンピュータ科学の分野では、国際研究集会において査読つきで論文発表がなされているので、このような研究集会への参加は非常に重要である。

4. 研究成果

(1) 2 個の orbit をもつ置換群において、その作用から構成されるコヒアラントコンフィギュレーションを GAP システムの SubdirectProducts 関数を使って求めることにより、それぞれの orbit の 1 点固定部分群 2 個の相互関係の様々な可能性を求めることができる。その 1 例として 25 元体上の 3 次ユニタリ群 $U_3(5)$ を主にとりあげ、それぞれの orbit の 1 点固定部分群が極大部分群となる場合の計算実験を行った。そこから、組合せデザインの再構成などの結果を得た。

(2) 以前の研究結果で、可移な置換群の正規化群や共役群計算の高速にする方法を求めているが、非可移な群では適用できない場合がある。その典型として部分直積群がある。そこで、この部分直積群の正規化群計算の高速化について考察、および、計算実験を行った。実験に関連して、GAP と Magma の両システムの計算性能の比較も併せて紹介した。

(3) コヒアラントコンフィギュレーションの自己同型の研究を行った。それらは置換群の正規化群と関係している。群から構成されるコンフィギュレーションの場合に、自己同型群の計算を、正規化群計算の高速化に応用した。その論法は、例えば、可移な群のときのように、群とその正規化群が共通の orbit をもつときに使える。ここでは、可移ではない群の正規化群計算の高速化のための注意点を求めた。例として、少数の orbit をもつ群で、各 orbit 上に置換群として同型に作用する群の場合を考えた。同じころ、Magma V2.18 (2011.12.10) において、正規化群および部分群の共役性計算が飛躍的に改良されたことがアナウンスされた。そのため、この研究は、また将来、続けることにした。

(4) t -スーパースキームは、 $k=1, 2, \dots, t$ に対して、点集合の k 点対のある条件を満たす分割で構成される。特に、それら分割が、置換群が点対に作用するときの orbit 全体の集合となるときの、スーパースキームの条件を満たしている。いくつかの $n-1$ 点上の可移な置換群で 3 点対上に少数の orbit をもつ場合に、その群を使って n 点集合の 2 点対の分割が自明な場合の 3-スーパースキームを、コンピュータを利用して、ほどほどの時間で計算できる場合について構成することができた。この例の 3-スーパースキームは、 n 点集合上の 2 重可移群から構成されるスキームと同じ条件を満たす。 $n-1$ 点上の可移群の可移拡

大は、この方法で計算して構成することができる。ここでは、このようなスーパースキームで、群の可移拡大とはならない場合についていろいろと調べた。GAP システムのデータライブラリにある可移群および原始的可移群すべてに対して、この計算実験を行った。その結果、数十個の群に対してこのようなスキームを構成することができた。このとき、もしスキームが可移拡大により構成されるならば、どの1点に対しても、その点を含む分割のセル全体は、残りの $n-1$ 点上でアソシエーションスキームを与えること、そして、拡大の適当な orbit は単純 2 デザインのブロック集合となることなどが知られている。上に述べた可移拡大ではないスキームに対して、この性質をもつかどうかを計算実験した。結果、ほんの少数のスキームのみがこの条件を満たした。この方法は、 $n-1$ 点上の 2 重可移群に対しても適用できる。そのときは、4-スーパースキームで 3 点対の分割が自明になるので、3 重可移群と類似の性質をもつことになる。実際に、いくつかのそのようなスキームを構成することができた。

(5) 次数 33, 34 の可移置換群の同型類を GAP の関数とアソシエーションスキームの分類を利用して求めた。分類方法は、既に確立されているといえる。また、280 万個余りもあった次数 32 の場合を分類した論文に、次の分類は 36 次まで困難は無いであろうなどと書かれていたが、実行には、メモリ容量オーバー、計算時間でどれくらい待ったらよいかわからないなど、通常の計算機環境では、工夫が必要であった。正規化群計算や部分群の共役計算に、以前の研究で求めたアルゴリズムを使った。

(6) 33 次と 34 次の可移置換群の同型類を計算して求めたアルゴリズムの改良を行った。その結果、プログラムにバグも見つかリ、上述の結果の修正を行った。また、分類済の 30 次までの可移置換群の再検証も、スムーズに計算できるようになった。新しく、35 次の可移置換群で、1 つの subdegree の場合を残して、同型類を求めた。さらに、残りの 1 つの場合に対応できるプログラムを作成して計算実験を行った。また、32 次の分類済みの場合の再検証を行って、特に、280 万個余りの同型類が存在する 32 次の場合では、1 つのアソシエーションスキームから 25 万個余りの同型類が得られる場合などを検証することができた。アソシエーションスキームの自己同型群を利用して、求めた多くの群から同型なものを除外する計算を高速化するための様々な工夫を行った。可移置換群の分類は、アルゴリズムとしては GAP の関数を使ってできる見込みであったが、実際に実行してみると大小様々な障害があった。とくに、部分群の共役性を調べることの高速化は基本的に重要であることが分かった。

そこで、部分群の共役性計算の高速化の研究を再開した。regular な正規部分群をもつ部分群の共役性の計算は GAP で高速に計算できるのでそのまま利用して、それ以外の場合の計算の高速化を試みた。実験で、GAP ライブラリにある 30 次までの可移置換群、500 次までの primitive な群に対して、それ自身とその適当な共役の間で共役を実現する元の計算実験を行った。GAP の共役元を求める関数では計算できない場合がいくつか出てくるが、作成したプログラムは、場合によっては GAP 関数による直接計算より遅いが、すべての場合について計算が完了した。残念なことに、Magma システムの新バージョンでは、共役性計算では、ほとんどすべての場合で 10 から 100 倍以上高速で計算ができる。これは、正規化群計算などのプログラムでは、Magma はコンパイルしたもので、GAP はインタープリタであることが主な原因と推測される。Magma よりも本研究のプログラムの方がはるかに高速な場合も存在する。

5. 主な発表論文等

[学会発表](計 6 件)

宮本泉, アソシエーションスキームを利用した可移置換群の構成, 京都大学数理解析研究所研究集会「数式処理とその周辺分野の研究 -- Computer Algebra and Related Topics」2013.12.25-27

宮本泉, 次数 33 の可移置換群の分類について, Computer Algebra - The Algorithms, Implementations and the Next Generation - 数式処理 - その研究と目指すもの, 数理解析研究所講究録 No.1843, 22 - 27, 2013.7

I. Miyamoto, Computation of some superschemes with trivial partition on the pairs of points, 2012 Shanghai Conference on Algebraic Combinatorics 2012.8.17-22;

<http://math.sjtu.edu.cn/Conference/SCAC/index.htm>

宮本泉, 部分直積群の正規化群計算の高速化について Computer Algebra - The Algorithms, Implementations and Next Generation - 数式処理 - その研究と目指すもの, 数理解析研究所講究録 No.1785, 67 - 72

I. Miyamoto, Computation of normalizers of intransitive permutation groups in symmetric groups, Symmetries of Discrete Objects Conference and MAGMA Workshop 2012.2.17, Queenstown, New Zealand

宮本泉, $U(3,5)$ の極大部分群の相互関係について, 第 23 回有限群論草津セミナー報告集.. 2011.7, 1-6

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~imiyamoto>

6．研究組織

(1)研究代表者

宮本 泉 (MIYAMOTO, Izumi)

山梨大学・医学工学総合研究部・教授

研究者番号：60126654