

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540012

研究課題名(和文) 団代数の基礎と応用の研究

研究課題名(英文) Study of foundation and applications of cluster algebras

研究代表者

中西 知樹 (Nakanishi, Tomoki)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：80227842

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：団代数の基礎と応用の研究を行い、研究成果の一部として以下の結果を得た。A. 二重対数関数および量子二重対数関数に対する応用、B. 有限型団代数におけるcベクトルとdベクトルの分類、C. 完全WKB解析に対する応用、D. 一般団代数の基礎的性質の研究および量子一般団代数の定式。  
これらの結果は、Rinat Kashaev、Salvatore Stella、岩木耕平らとの共同研究に基づく。

研究成果の概要(英文)：We studied the foundation and applications of cluster algebras, and we obtained the following results as a part of the research result.

A. Applications to dilogarithm identity and quantum dilogarithm identity, B. Classification of c-vectors and d-vectors of cluster algebras of finite type, C. Applications to exact WKB analysis, D. Study of fundamental properties of generalized cluster algebras and formulation of quantum generalized cluster algebras.

These results are based on joint works with Rinat Kashaev, Salvatore Stella, and Kohei Iwaki.

研究分野：代数学

キーワード：団代数 完全WKB解析 二重対数関数

## 1. 研究開始当初の背景

21世紀初頭に Fomin と Zelevinsky により導入された団代数は、Lie 群、量子群、パス代数、双曲代数、古典および量子可積分系など、多分野に現れる自然な代数構造として近年その有用性と重要性が認識され、世界中のさまざまな分野の研究者により活発な研究されている。しかしながら、長い目で見るとまだ発展の初期段階であり、基礎的な研究が必要とされる。たとえば、団代数の構成はルート系と密接に関連している、ある種のルート系の拡張理論と考えられるが、それを公理的あるいは内在的な形で定式化することはなされていない。また、団代数の応用に関しても、すでに知られている関係の理解を深めるとともに、関連を模索し、明確に定式化すべき分野がまだまだ多くあると考えられる。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は団代数の基礎的な性質の研究ならびに団代数の応用を行うことにある。

## 3. 研究の方法

Yシステムや完全 WKB 解析などさまざまな局面における団代数の構造を明らかにするとともに、そこから団代数の基礎的な性質に関する新たな知見を引き出すことを主な研究方法とする。

## 4. 研究成果

研究成果は大きく以下の4つに分類される(文献番号は5節の番号にしたがう)

A. 二重対数関数および量子二重対数関数に対する応用(論文1、2、3、5)

論文 [1] において、Kashaev とともに、量子二重対数関数恒等式と量子団代数の関係の包括的理解を与えた。この結果は

Fock-Goncharov, Keller, Volkov などの結果をより明確かつ一般的に定式化したものである。さらに、Faddeev-Kashaev による、量子五角形恒等式と古典五角形恒等式の関係の結果を踏まえ、これを大きく一般化する形で、量子二重対数関数恒等式の半古典極限として対応する古典二重対数関数恒等式が得られることを明らかにした。また、論文 [2] において、団代数のトロピカル的手法の総括を与えた。論文 [3] において、Feigin と Cherednik の予想した二重対数関数恒等式の団代数的証明を与えた。論文 [5] において、Stella とともに、Tateo が導入した sine-Gordan および簡約 sine-Gordon 型 Y システムの研究を行った、はじめに、これらの Y システムが多角形の三角分割に付随する団代数により定式化できることを示した。これ自体、連分数展開とも深く関わる興味深い結果と考える。さらにこの多角形による実現を用いて、Tateo が予想した Y システムの周期性と付随する二重対数関数恒等式を全く一般的な形で証明することに成功した。

B. 有限型団代数における c ベクトルと d ベクトルの分類(論文2)

Stella とともに、有限型団代数の c ベクトルと d ベクトルの分類問題を考えた。まずはじめに、有限型団代数の各型に対するすべての籠を決定した。さらに、c ベクトルと d ベクトルの集合は各型について完全に一致することを示し、それらを初期籠のサブグラフとして明示的に完全に決定した。系として、有限型の場合は、すべての c ベクトルは初期籠に付随するルートとなることを明らかにした。これらのルートの集合を公理的に記述することは、我々が目指す拡張ルート系の理論としての団代数の定式化の第一歩を

与え、これについて、引き続き研究を行う計画である。

#### C. 完全 WKB 解析に対する応用 (論文 6, 7)

論文 [6] において、岩木とともに、完全 WKB 解析におけるシュレディンガー方程式の 2 位の極のまわりの Voros 係数の「変異」の定式化を与え、さらにそれが団代数の変異と一致することを示した。さらに、論文 [7] では、岩木とともに、単純極のまわりの Voros 係数の「変異」の定式化を行い、それが最近 Chekhov と Shapiro により導入された一般団代数の変異と一致することを示した。これらの結果は、完全 WKB 解析に対する新しい視点と今後解決されるべき多くの問題を与えるとともに、団代数の曲面実現における変異の一般化 (符号付変異) が必要であることを明らかにした。これらの問題について、引き続き研究を行う。

#### D. 一般団代数の基礎的性質の研究および量子一般団代数の定式化 (論文 8, 9)

論文 [7] の結果に示唆され、論文 [8] では、団代数において基本的である団変数の分離公式や双対性が、Chekhov と Shapiro により導入された一般団代数に対して自然に拡張されることを示した。論文 [9] では、Fock と Goncharov による団代数の量子化が、一般団代数に対しても成り立つことを示した。一般団代数の圏化の理論を構築することが今後の大きな課題として残された。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 9 件)

以下はすべて査読付雑誌に掲載されたもの

である ( [7] のみオンライン早期出版のため、印刷未公表 )

[1] Rinat M. Kashaev, Tomoki Nakanishi, Classical and quantum dilogarithm identities, SIGMA 7 (2011) 102, 29 pages.

[2] Tomoki Nakanishi, Tropicalization method in cluster algebras, Contemp. Math. 580 (2012) 95—115.

[3] Tomoki Nakanishi, Note on dilogarithm identities from nilpotent double affine Hecke algebras, SIGMA 8 (2012) 104, 5 pages.

[4] Tomoki Nakanishi, Salvatore Stella, Diagrammatic description of c-vectors and d-vectors of cluster algebras of finite type, Electron. J. Combin. 21 (2014) #P1.3, 107 pages.

[5] Tomoki Nakanishi, Salvatore Stella, Wonder of sine-Gordon Y-systems, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016) 6835--6886; DOI:10.1090/tran/6505.

[6] Kohei Iwaki, Tomoki Nakanishi, Exact WKB analysis and cluster algebras, J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014) 474009; DOI:10.1088/1751-8113/47/47/474009.

[7] Kohei Iwaki, Tomoki Nakanishi, Exact WKB analysis and cluster algebras II: simple poles, orbifold points, and generalized cluster algebras, Int. Math. Res. Not. 2015 (first published online) DOI:10.1093/imrn/rnv270.

[8] Tomoki Nakanishi, Structure of seeds in generalized cluster algebras, Pacific J. Math. 277 (2015) 201--218; DOI:10.2140/pjm.2015.277.201.

[9] Tomoki Nakanishi, Wonder of sine-Gordon Y-system. Quantum generalized cluster algebras and quantum dilogarithms of higher degrees, Theor. Math. Phys. 185 (2015) 1759--1768; DOI:10.1007/s11232-

015-0377-9.

〔学会発表〕（計 15 件）

以下はすべて国際会議における招待講演である。

[1] Tomoki Nakanishi, Infinite Analysis 13: Bethe ansatz, quantum groups and beyond, RIMS, March 7-9, 2013, Kyoto, Japan.

[2] Tomoki Nakanishi, Wonder of sine-Gordon Y-system. Algebra, Combinatorics and Representation Theory: in memory of Andrei Zelevinsky, Northeastern University, April 24-28, 2013, Boston, USA.

[3] Tomoki Nakanishi, Diagrammatic description of c-vectors and d-vectors in cluster algebras of finite type. String Theory, Integrable Systems and Representation theory, RIMS, July 30-August 2, 2013, Kyoto, Japan.

[4] Tomoki Nakanishi, Exact WKB analysis and cluster algebras. Cluster algebras and related topics, MFO, December 8-14, 2013, Oberwolfach, Germany.

[5] Tomoki Nakanishi, Exact WKB analysis and cluster algebras. Geometry, physics and representation theory, Nagoya University, February 21-22, 2014, Nagoya Japan.

[6] Tomoki Nakanishi, Exact WKB analysis and cluster algebras. Combinatorial Representation theory, Centre de recherches mathématiques - CRM - Université de Montréal, April 21-25, 2014, Montréal, Canada.

[7] Tomoki Nakanishi, Exact WKB analysis and cluster algebras. 4TH Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras, and Topological Recursion, Laboratoire J.-V. Poncelet, Steklov Mathematical Institute, and the Higher School of Economics, May 26-31, 2014, Moscow, Russia.

[8] Tomoki Nakanishi, Cluster algebras and Y-systems (four lectures). Summer School on Quantum Groups and Integrability - Algebraic, Analytic and Geometric Aspects, Universität Hamburg, July 21-25, 2014, Hamburg, Germany.

[9] Tomoki Nakanishi, On generalized cluster algebras. Conference on strings, quivers and cluster algebras in mathematical physics, KIAS CMC, December 18-22, 2014, Seoul, Korea.

[10] Tomoki Nakanishi, Introduction to cluster algebras. The 7th young algebraists seminar, Nagoya University, March 17, 2015, Nagoya, Japan.

[11] Tomoki Nakanishi, On generalized cluster algebras. The Ninth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, University of Georgia, April 1-4, 2015, Athens, USA.

[12] Tomoki Nakanishi, Cluster algebras and applications (5 hour lecture). School and International Conference on Geometry and Quantization GEOQUANT 2015, ICMAT, September 7-18, 2015, Madrid, Spain.

[13] Tomoki Nakanishi, Riemann surface and cluster algebra. Quantization of Spectral Curves, Osaka City University, November 2-6, 2015, Osaka, Japan.

[14] Tomoki Nakanishi, Introduction to cluster algebras. Symposium on Representation Theory 2015, November 17-20, 2015, Izunagaoka, Japan.

[15] Tomoki Nakanishi, Introduction to cluster algebras/Tropical variables in cluster algebras. (2 talks) Tropical Geometry and Related Topics, Kyoto University, March 7-11, 2016, Kyoto, Japan.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~nakanisi/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中西 知樹

(NAKANISHI TOMOKI)

名古屋大学・大学院多元数理科学

研究科・教授

研究者番号： 23540012

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：