

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 16 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540013

研究課題名(和文) 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の構成と分類

研究課題名(英文) Construction and classification of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24

研究代表者

島倉 裕樹 (Shimakura, Hiroki)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：90399791

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000 円、(間接経費) 1,170,000 円

研究成果の概要(和文)：中心電荷24の正則頂点作用素代数の構成及び分類問題は大きな未解決問題の一つである。1993年に71個の存在が予言され、1996年までにそのうちの39個の存在が示されていた。

本研究において、枠付頂点作用素代数の理論と軌道体構成法を用いることで新たに9個の構成に成功した。同時期に他の研究者によって構成された11個と合わせて、合計で59個の存在が確定した。この成果によって、71個の構成に向けて大きく前進をした。また、枠付の仮定の下で、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数が丁度56個存在することを証明し、分類問題の解決に向けた成果をだした。

研究成果の概要(英文)：The construction and classification of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 is a famous open problem. In 1993 existence of 71 holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 is predicted, and in 1996, 39 of them are explicitly constructed.

In this research, we construct nine new ones by using framed vertex operator algebra theory and orbifold construction. Since eleven new ones are obtained by other researchers, we know that there exist 59 holomorphic vertex operator algebras of central charge 24. This makes progress in the construction problem. In addition, we prove that there exist exactly 56 holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24. This makes progress in the classification problem.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学 頂点作用素代数 格子 自己同型群 軌道体構成法 正則頂点作用素代数 アフィンリー代数 枠付頂点作用素代数

1. 研究開始当初の背景

中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類問題は頂点作用素代数の研究開始当初からの未解決問題の一つである。1996 年までに格子に付随する 39 個の具体例が構成された以降は進展が無い状況であった。一方で、1993 年に Schellekens が中心電荷 24 の正則頂点作用素代数に内包される可能性のある 71 個のリー代数のリストを与えている。したがって、残り 32 個のリー代数に対して、それらを内包する正則頂点作用素代数が存在するかどうか、が問題となっていた。

さらに、構成だけでなく、リー代数から頂点作用素代数構造が一意的に決まるかどうかについても問題として残されていた。

それに加え、予想されている 71 という数はモンスターの位数の最大の素因子であり、この分類からモンスターに関する新展開が起こることが期待されている。

2. 研究の目的

本研究の目的は中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の構成及び分類を行う事である。特に、枠付と呼ばれるクラスにおける構成及び分類を行う事を目指とする。それに加え、枠付でない正則頂点作用素代数の構成を軌道体構成法を用いて試みる。

3. 研究の方法

枠付正則頂点作用素代数の大まかな構造は三重偶符号を用いて記述される。このような符号の分類を基にして正則頂点作用素代数の構成及び分類を行った。特に、ある三重偶符号の系列に対応する頂点作用素代数の拡大は直交空間を用いて記述されることから、分類問題を有限幾何における極大全特異的部分空間の分類問題に帰着させる。さらに、既に構成されている格子頂点作用素代数となる場合を除いた上での分類を考えることで、計算効率を飛躍的に高める。そうして、得られた空間に対応する頂点作用素代数のリー代数を計算し、新しい正則頂点作用素代数が得られることを確認する。

こうして得られた正則頂点作用素代数がリー代数から一意的に定まるかを考える。実際には、枠付の仮定の下では、正則頂点作用素代数の候補が限られており、同型なリー代数を持つ場合には頂点作用素代数が同型であることを直接示す。また、ある種の三重偶符号に対しては、符号から枠付正装頂点作用素代数構造が一意的に決まる事を示す。これら手法を組み合わせ一意的性を証明する。

その後、軌道体構成法を用いて、枠付でない正則頂点作用素代数の構成を試みる。特に位数 3 の自己同型と格子頂点作用素代数に関する軌道体構成法は宮本氏によって確立されており、それを用いて新しい正則頂点作

用素代数が得られる可能性を考察する。

4. 研究成果

(1) 中心電荷 24 の枠付正則頂点作用素代数の構成及びリー代数構造の決定を行った。三重偶符号の分類及び Lam 氏の先行研究から、分解可能な極大三重偶符号の部分符号の場合が残されていた。そして、格子に付随する頂点作用素代数の拡大を直交空間における極大部分空間を分類に結びつけて、枠付正則頂点作用素代数の分類を行った。その結果、新たに 7 個の正則頂点作用素代数を見つけることが出来、さらにリー代数の可能性が 56 通りであることがわかった。この研究により、71 個のリー代数のリストのうち、56 個のリー代数に関しては正則頂点作用素代数の存在が確定した。

(2) 格子に付随する頂点作用素代数のイジング元の分類をした。イジング元は自己同型を誘導する重要な元であり、またそれらが生成する代数系の分類が行われているなど、頂点作用素代数を研究する上で重要な役割を果たす。格子に付随する頂点作用素代数に関しては二通りの構成法が知られており、それらで全てのイジング元が得られると予想されていた。このことを肯定的に証明した。

(3) 研究成果 (1) を基にして、中心電荷 24 の枠付正則頂点作用素代数の分類を行った。特に、ある種の符号に付随する枠付正則頂点作用素代数の構造の一意的性を証明した。その結果、リー代数から頂点作用素代数構造が一意的に決まる事が示され、丁度 56 個存在することがわかった。これは分類問題の解決に向けた大きな一歩となる。

(4) 階数 32 の Barns-Wall 格子に付随する正則頂点作用素代数の自己同型群を決定した。特に、その構造を決める上で、グライス代数上にグラフ構造を導入し、その自己同型群として群構造を決定した。この頂点作用素代数は高い対称性を持つことが予想されており、その研究のためには重要な結果である。

(5) 位数 3 の格子の自己同型に付随する軌道体構成法を用いて枠付でない中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を 2 個構成した。特にリー代数構造をきちんと決めることで、レベルが 3 冪のアファイン表現を持つことがわかった。この結果と今までの研究成果から、59 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の存在が確定し、71 個の構成に向けて大きく前進した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 5 件)

D. Sagaki & H. Shimakura, Application of a \mathbb{Z}_3 -orbifold construction to the lattice vertex operator algebras associated to Niemeier lattices, to appear in Trans. Amer. Math. Soc. 査読あり
C.H. Lam & H. Shimakura, Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, to appear in Amer. J. Math.. 査読あり
H. Shimakura, The automorphism group of the \mathbb{Z}_2 -orbifold of the Barnes-Wall lattice vertex operator algebra of central charge 32, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 156 (2014), 343–361. 査読あり
H. Shimakura, Classification of Ising vectors in the vertex operator algebra V_L^+ , Pacific J. Math. 258 (2012), 487–495. 査読あり
C.H. Lam & H. Shimakura, Quadratic spaces and holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, Proc. London Math. Soc. 104 (2012), 540–576. 査読あり

〔学会発表〕(計 18 件)

H. Shimakura, Orbifold construction and holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, Hualien Workshop on Finite Groups, VOA, Algebraic Combinatorics and Related Topics, National Dong Hwa University (台湾), 2014.3.21.
島倉裕樹, 頂点作用素代数とモンスター, 日本数学会東北支部会(特別講演), 宮城教育大学, 2014.2.15
島倉裕樹, 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類に向けて, 頂点作用素代数と超弦理論, 立教大学, 2014.1.31.
H. Shimakura, On holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, Workshop on Majorana Theory, the Monster and Beyond, Imperial college London (英国), 2013.9.16.
H. Shimakura, \mathbb{Z}_3 -orbifold construction and holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, Beyond the Moonshine, ホテル華乃湯, 2013.7.11.
島倉裕樹, \mathbb{Z}_3 軌道体構成法と中心電荷 24 の正則頂点作用素代数, 第 30 回代数的組合せ論シンポジウム, 静岡大学, 2013.6.24.
H. Shimakura, On Miyamoto's \mathbb{Z}_3 orbifold construction, Taitung Workshop on group theory, VOA and

algebraic combinatorics, Taitung University (台湾), 2013.3.25.

島倉裕樹, 中心電荷 24 の枠付頂点作用素代数について, 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究, 京都大学数理解析研究所, 2013.1.7.

H. Shimakura, Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, Conference on Groups, VOAs and Related Structures in Honor of Masahiko Miyamoto, Tsukuba University, 2012.9.10.

H. Shimakura, Classification of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 associated to quadratic spaces, Conference on vertex operator algebras and related topics, Shanghai Jiaotong University (中国), 2012.8.25.

島倉裕樹, 中心電荷 24 の枠付正則頂点作用素代数の分類について, 有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2012.7.30.

島倉裕樹, 符号, 格子と頂点作用素代数における類似, デザイン, 符号, グラフおよびその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2012.7.18.

H. Shimakura, Binary codes, lattices and vertex operator algebras, Mathematical Coding Theory and its Industrial Applications, University of Hawaii (米国), 2012.3.3.

H. Shimakura, Ising vectors in the vertex operator algebra V_L^+ , Conference on Vertex Operator Algebras, Finite groups and Related topics, Academia Sinica (台湾), 2011.12.19.

島倉裕樹, 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類へ向けて, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会(特別講演), 信州大学, 2011.9.28.

H. Shimakura, Towards the classification of framed holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, Conformal Field Theory, Automorphic Forms and Related Topics, Heidelberg (ドイツ), 2011.9.21.

島倉裕樹, $2^{1+24}_+ \cdot \text{Co}_1$ の involution の個数について, 第 23 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2011.7.31

島倉裕樹, Kleinian codes and vertex operator algebras associated with even lattices, 第 28 回代数的組合せ論シンポジウム, 大分大学, 2011.6.22.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

島倉裕樹 (SHIMAKURA, Hiroki)
東北大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：90399791

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：