

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 5 月 25 日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540014

研究課題名(和文) グラフのラプラシアンの数論的研究

研究課題名(英文) Number-theoretical study on graph Laplacians

研究代表者

山岸 正和 (Yamagishi, Masakazu)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：40270996

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では各種グラフの系列に対しラプラシアンの数論的振舞を調べた。主な結果は、パスグラフおよびサイクルグラフのデカルト積の場合のHunziker-Machiavelo-Parkの問題の肯定的解決、核空間の次元をチェビシェフ多項式で表わす公式の予想およびその証明である。これらの研究で培った各種多項式に関する知見を活かして、チェビシェフ多項式と双子素数の関係、チェビシェフ多項式の終結式の計算とその応用、有限体の等長埋め込みに関する結果(研究分担者)も得た。

研究成果の概要(英文)：We investigated number-theoretical behavior of the Laplacian for certain series of graphs, mainly for Cartesian products of path or cycle graphs. Specifically, we solved a problem of Hunziker-Machiavelo-Park in the affirmative way, conjectured a formula for the dimension of the space of harmonic functions in terms of Chebyshev polynomials, and succeeded in proving the conjecture. Applying some techniques for polynomials used in the main study, we also obtained some results on a relation between Chebyshev polynomials and twin primes, on the resultant of Chebyshev polynomials and its application, and on isometric embeddings of finite fields.

研究分野：数論

キーワード：グラフのラプラシアン チェビシェフ多項式 円分多項式 楕円曲線 有限体 ライツアウトパズル  
セルオートマトン 双子素数

### 1. 研究開始当初の背景

(1) パスグラフ・サイクルグラフのデカルト積のラプラシアン核空間(調和関数空間)の研究がリーマン多様体の離散類似, グラフ上のセルオートマトンの理論, 統計物理学など様々な分野の観点からなされて来た。グラフのサイズと非自明な調和関数の存在・非存在(あるいはより詳しく, ラプラシアン核空間の次元)との関係が調べられ, 非常に複雑な問題であることが認識された。Sutner(引用文献)によりチェビシェフ多項式との関係が見出され, また Zaidenberg(引用文献)では数論, 特に楕円曲線の数論との深い関係が見出された。研究代表者は係数体が2元体の場合に数値実験の結果から一連の予想を提出し, そのうちいくつかについて証明を与えていた(引用文献)。

(2) グラフの伊原ゼータ関数がリーマン予想の類似を満たすための条件がラプラシアンの固有値で記述され, この性質を持つグラフはラマヌジャングラフと呼ばれる。ラマヌジャングラフは効率的なネットワーク構築への応用の観点からも注目されてきた。しかしラマヌジャンを具体的に構成する初等方法は知られておらず, 例えば Lubotzky-Phillips-Sarnak による最初の構成(1986)では数論の深い結果であるラマヌジャン予想・ヴェイユ予想が利用された。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は数論的観点からのグラフのラプラシアンの研究である。

(1) 有限グラフの各種系列に対し, ラプラシアン核空間の次元によって定まる数列の数論的振舞を明らかにすること。特にパスグラフ, サイクルグラフ, 完全グラフのデカルト積の場合には, グラフ上のセルオートマトンの理論, ライツアウト型パズルとの関係から非専門家による寄与も含め興味深い事実が多数知られているが, 十分解明されているとは言えない。これらに対し統一的な説明・証明を与えることを第一の目的とする。

(2) 数論を利用したラマヌジャングラフの構成法の研究。

### 3. 研究の方法

(1) 代数学関係図書を購入し文献購読を行なう。

(2) 数式処理ソフトウェア Mathematica を購入し, グラフのラプラシアンの固有値に関連する数値計算を行なう。

(3) 文献購読と数値計算に基づき新しい結果の創出(現象の発見, 定理の証明, 理論の構築)を行なう。

(4) 研究成果を論文にまとめ学術雑誌に発表する。また口頭発表(中間発表・成果発表)を国内・国外で行なう。

### 4. 研究成果

各種グラフ系列のラプラシアンの数論的振舞に関する研究成果は以下の通りである。

(1) パスグラフ・サイクルグラフのデカルト積のラプラシアン核空間の次元に関し, 先行研究である引用文献の主要結果を係数体が $p$ 元体( $p$ は素数)の場合に拡張することに成功した。証明の概略は引用文献と同様であり, 有限体上の楕円曲線を利用するものであるが, より精密な数論的考察を必要とした。応用として Hunziker-Machiavelo-Park(引用文献)の問題「係数体が $p$ 元体のとき, 2次元グリッド上に原始的可逆加法的セルオートマトンは無数に存在するか」に肯定的解答を与えた( $p=2, 3$ の場合は彼らが証明済み)。この問題は理論計算機科学で生じたものであり, 本研究成果の理論計算機科学への応用が今後期待される。

(2) パスグラフ・サイクルグラフのデカルト積のラプラシアン核空間の次元をチェビシェフ多項式(第1種, 第2種)のGCDを用いて明示的に与える公式を予想し, これを完全に証明した。いくつかの特別な場合には既知であったが, 本研究ではこの枠組で考え得る最大限の一般化に成功した。こうして本研究の主要研究対象「ラプラシアン核空間の次元によって定まる数列」の閉じた形での表示を得ることができ, 当初の目的がチェビシェフ多項式の数論的性質の研究に帰着されることがわかった。なおチェビシェフ多項式の数論的性質自体が, また非常に深く複雑な問題であることを注意しておく。公式の応用として, 核空間の次元の間の新しい関係式をいくつか発見し, また楕円曲線を利用して証明された既知のいくつかの関係式に対し別証明を与えることができた。

研究成果(1), (2)では二つのパスグラフ・サイクルグラフのデカルト積が研究対象であったが, 今後の課題として高次元化, すなわち三つ以上のグラフのデカルト積の場合の研究が考えられる。

(3) 完全グラフのデカルト積のラプラシアンのある力学系的な振舞を問題とし, その性質を3種類に分けて考える。グラフのサイズを指定したとき, ラプラシアンが3種類の性質のどれに分類されるかを数論的に記述することができた。論文ではライツアウト型パズルの一種 Alien Tiles の性質に言い換えて, この結果を記述した。

(4) 研究成果(1)に類似の手法をパスグラフ・サイクルグラフの強積(strong product)

に適用し，ライツアウト型パズルの一種 Trisentis の性質に関する Clausing (引用文献) の問題に肯定的解答を与えた。(時間的にはこちらが先であるが，説明の都合上この順とした。)

研究成果(3),(4)は現在のところパズル的な興味の主であるが，その組合せ的・代数的な性格から，今後のより深い研究に値すると思われる。

本研究では，本来の研究目的のために培った各種多項式に関する知見を活かし，研究開始当初には想定していなかった次のような結果も得た。

(5) チェビシエフ多項式と双子素数に関する Humphries の結果を第3種，第4種チェビシエフ多項式と円分多項式を用いて整理し，また Humphries の一連の予想のうちの一つについて反例を発見した。この方向から双子素数に関する新しい事実が見つかることはあまり考えられないが，逆に双子素数予想に関する最近の発展から，チェビシエフ多項式について新しい知見が得られるかも知れない。

(6) 第1,2,3,4種チェビシエフ多項式の終結式の計算を行なった。応用として円分多項式の終結式に関するよく知られた結果の精密化が得られた。円分体の最大実部分体の研究への応用を現在準備中である。

研究成果(5),(6)では(第1種，第2種だけでなく)第3種，第4種チェビシエフ多項式が数論的記述に大変好都合であることが明らかとなった。今後の課題として，他の直交多項式系で同様のことがあるのか，また楕円類似についてはどうか，といった問題が考えられる。

(7) 研究分担者は有限体の等長埋め込みを考察し，特に標数2の場合にその特徴付けを行なった。

(8) 研究分担者は類体等のガロア群に関する考察において，本研究の知見を活かした。

ラマヌジャングラフに関しては基礎的考察にとどまり，残念ながら新しい結果の創出には至らなかった。

#### <引用文献>

Goshima, Masato; Yamagishi, Masakazu, *On the dimension of the space of harmonic functions on a discrete torus*. Experiment. Math. **19** (2010), no. 4, 421-429.

Zaidenberg, Mikhail. *Periodic binary harmonic functions on lattices*, Adv. in

Appl. Math. **40**(2008), no. 2, 225-265.

Hunziker, Markus; Machiavelo, António; Park, Jihun. *Chebyshev polynomials over finite fields and reversibility of -automata on square grids*. Theoret. Comput. Sci. **320** (2004), no. 2-3, 465-483.

Clausing, Achim. *Das Trisentis-Spiel*. Math. Semesterber. **48** (2001), no. 1, 49-66.

Sutner, Klaus. *-automata and Chebyshev-polynomials*. Theoret. Comput. Sci. **230** (2000), no. 1-2, 49-73.

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計8件)

YAMAGISHI, Masakazu. *Resultants of Chebyshev polynomials: The first, second, third, and fourth kinds*. Canad. Math. Bull. **58** (2015), no. 2, 423-431. 査読有  
DOI:10.4153/CMB-2015-002-8

YAMAGISHI, Masakazu. *Periodic harmonic functions on lattices and Chebyshev polynomials*. Linear Algebra Appl. **476** (2015), 1-15. 査読有  
DOI:10.1016/j.laa.2015.03.004

MIZUSAWA, Yasushi. *A note on semidihedral 2-class field towers and  $Z_2$ -extensions*. Ann. Math. Qué. **38** (2014), no. 1, 73-79. 査読有  
DOI:10.1007/s40316-014-0013-3

MIZUSAWA, Yasushi; Nishikawa, Shinya. *Isometric embeddings of finite fields*. Finite Fields Appl. **25** (2014), 134-145. 査読有  
DOI:10.1016/j.ffa.2013.09.003

YAMAGISHI, Masakazu. *Solving alien tiles by an iteration method*. Adv. Appl. Discrete Math. **11** (2013), no. 2, 161-172. 査読有  
<http://www.pphmj.com/abstract/7579.htm>

YAMAGISHI, Masakazu. *A note on Chebyshev polynomials, cyclotomic polynomials and twin primes*. J. Number Theory **133** (2013), no. 7, 2455-2463. 査読有  
DOI:10.1016/j.jnt.2013.01.008

YAMAGISHI, Masakazu. *Elliptic curves over finite fields and reversibility of additive cellular automata on square grids*. Finite Fields Appl. **19** (2013), 105-119. 査

読有

DOI:10.1016/j.ffa.2012.08.009

YAMAGISHI, Masakazu. *A singular quartic curve over a finite field and the Trisentis game.* Finite Fields Appl. **17** (2011), no. 4, 377-394. 査読有  
DOI:10.1016/j.ffa.2011.02.002

〔学会発表〕(計5件)

YAMAGISHI, Masakazu. Chebyshev polynomials over finite fields and periodic harmonic functions on lattices, ICM2014, COEX, Seoul, Korea, 2014年8月15日

水澤靖, 実2次体  $\mathbb{Z}_2$  拡大と準二面体型2-類体塔, 日本数学会年会一般講演(代数学), 学習院大学, 2014年3月18日

水澤靖, 有限体の等長埋め込み, 日本数学会年会一般講演(代数学), 学習院大学, 2014年3月18日

山岸正和, チェビシエフ多項式と円分多項式と双子素数, 日本数学会年会一般講演(代数学), 京都大学, 2013年3月23日

山岸正和, 楕円曲線とグラフのラプラシアン, 愛知数論セミナー, 名古屋工業大学, 2012年9月29日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山岸 正和 (YAMAGISHI, Masakazu)  
名古屋工業大学・大学院工学研究科・准教授  
研究者番号: 40270996

### (2) 研究分担者

水澤 靖 (MIZUSAWA Yasushi)  
名古屋工業大学・大学院工学研究科・准教授  
研究者番号: 60453817