

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 19 日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540019

研究課題名(和文) 不定方程式及び生成多項式を用いた代数体のイデアル類群の研究

研究課題名(英文) Study of ideal class groups of algebraic number fields by using Diophantine equations and generic polynomials

研究代表者

岸 康弘 (Kishi, Yasuhiro)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：60380375

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円、(間接経費) 480,000円

研究成果の概要(和文)：巡回群でないようなイデアル類群を持つ代数体の構成のため、生成多項式及びある種の不定方程式の分析を行った。その結果、4を法として3と合同な素数 p に対し、イデアル類群の p -rankが2以上となるような $p-1$ 次の虚巡回体の無限族を明示的な形で与えた。また、 $p=3$ の場合の鏡映関係の精密化を与え、3-rankが2以上のイデアル類群を持つ虚2次体の新たな無限族を得た。

研究成果の概要(英文)：In this research, we investigated Diophantine equations and generic polynomials in order to construct algebraic number fields whose ideal class groups are not cyclic. As a result, for a prime number p which is congruent to 3 modulo 4, we gave explicitly an infinite family of imaginary cyclic fields of degree $p-1$ whose ideal class groups have p -rank at least 2. We also gave a refinement of Spiegelung relation for $p=3$, and got a new infinite family of imaginary quadratic fields whose ideal class groups have 3-rank at least 2.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：イデアル類群 類数 不定方程式 生成多項式 代数体

1. 研究開始当初の背景

本研究が対象としている代数体のイデアル類群について、その位数は類数と呼ばれ、代数体の整数環における既約元への一意分解性の『ずれ』を表す不変量として、代数的数論において古くから研究の対象となっている。しかしながら、ガウス予想をはじめ、2次体の類数に関してですらその値は明確に捉えられず、数多くの未解決問題が残っている。

類数に関する基本的な問題として「類数の可除性」に関する研究がある。与えられた整数で割れる類数を持つような代数体の構成は、Nagell や Honda をはじめ数多くの結果が知られており、研究代表者もいくつかの業績を持つ。しかしながら、その特徴づけについては、ほとんどの場合に解決していない問題であり、現在のところ2次体における類数の3での可除性、及びある条件下での4次巡回体における類数の5での可除性についてのみ解決されている状況にある。

本研究は、「類数の可除性」に関する問題に対して、さらに「イデアル類群の構造」にまで踏み込んでいる。Buell の数値実験によると、イデアル類群の2-partを除いた部分が巡回群となるような虚2次体は、判別式 $-D$ が $0 < D < 4000000$ の範囲で約95%となっており、 p -rank が2以上の虚2次体は稀にしか存在しない。また、イデアル類群の p -part が巡回群でないような代数体は、その単項化問題や類体塔の問題において現象が複雑化し興味深い対象となっている。従って、ランクの高いイデアル類群を持つ代数体の構成は興味を惹かれる問題となるが、「2次体のイデアル類群の p -rank は限りなく大きくなるか」という基本的な問題すら解決をみていない。そのような背景の下で、研究の対象としている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、生成多項式及びある種の不定方程式の分析により、巡回群でないようなイデアル類群を持つ代数体の構成及び特徴づけをすることである。また、ある条件を満たすような代数体における類数の可除性、非可除性についての特性を得ることも目的としている。

3. 研究の方法

本研究の方法は、生成多項式の分析、不定方程式の分析、鏡映関係の精密化を3つの柱としている。

Takagi-Artin の類体論により、イデアル類群と不分岐アーベル拡大との関係が確立されたが、それによると、不分岐アーベル拡大を追いかけることにより類群に関する情報が得られる。本研究の1つ目の柱は、生成多項式を利用し、不分岐アーベル拡大を与える多項式の構成を行うことである。生成多項式を直接扱うには複雑で困難となるため、単純に扱うための工夫として単数、特に相対単数を用いる。そのため、相対単数の分析を行うとともに、数多くの数値実験を試みる。

一方、類数が p で割れる代数体の構成には、位数が p のイデアル類を直接作るという方法もある。位数が p のイデアル類の構成には、多くの場合、ある種の不定方程式に帰着される。従って、当該の不定方程式における整数解の有無やその個数についての分析を行うことが2つ目の柱である。

3つ目の柱は代数体における鏡映関係である。1932年にScholzは2つの2次体のイデアル類群の3-rankについて、ある関係式を与えた。これは、証明の手法や対称性から素数3に対する「鏡映定理」と呼ばれる。以後、鏡映定理はLeopoldtやKuroda, Gras等により様々な拡張や精密化がなされ、研究代表者もある種の精密化を行っている。さらなる精密化を行うことで、3-rankの高いイデアル類群を持つような2次体の構成を目論んでいる。

4. 研究成果

(1) p を4を法として3と合同な素数とする。 $p-1$ 次の虚巡回体上に p 次巡回拡大を与えるような整数係数の $p-1$ 次多項式を分析し、またある実2次体の単数とそれに付随する不定方程式の整数解の個数を考察することにより、イデアル類群の p -rank が2以上となるような $p-1$ 次の虚巡回体の無限族を明示的に与えた。この結果は、研究代表者が徳島大学の片山真一氏との共同研究として、4を法として1と合同な素数に対して与えた同様の結果の類似となっている。

(2) $p=3$ の場合の鏡映関係の精密化を与えた。具体的には、鏡映関係にある2つの2次

体の間の 3-rank が等しくなる場合とそうでない場合の判定条件を、ある不定方程式の解の有無によって書き下した。この結果を用いて、既存の結果に対するより単純な証明を与えることができた。さらに、3-rank が 2 以上のイデアル類群を持つ虚 2 次体の新たな無限族を、比較的単純な形でパラメトリックに構成した。

(3) 実 2 次体の類数問題の 1 つである「ガウスの類数 1 問題」に関連して、ある 2 次無理数の連分数展開に付随する極小型自然数という概念が、学習院大学の河本史紀氏、名城大学の富田耕史氏によって近年導入されている。研究代表者は、福岡教育大学の田尻彩華氏、吉塚健一郎氏との共同研究により、連分数展開の極小型に関連する様々な性質を明らかにした。そして、連分数展開の部分商の対称部分の先頭部のみが異なる 2 次無理数に着目することにより、4 以上の任意の自然数 n に対して周期 n の極小型自然数が無数に存在することの証明に成功した。

(4) 学習院大学の河本史紀氏、名城大学の富田耕史氏、名古屋大学の鈴木浩志氏と連携して、「末尾急増型」と呼ばれる連分数展開に現れる部分商に関する性質を定義し、末尾急増型の連分数展開を持つような 2 次無理数の持つ性質やその構成法等の研究を行った。主な結果は次の 3 つである。

末尾急増型の連分数展開を持つような 2 次無理数の特徴づけを行った。

末尾急増型の連分数展開を持つ 2 次無理数の構成に関する原理を解明した。その結果、末尾急増型の連分数展開を持つ 2 次無理数をすべて与える構成法を得ることに成功した。

与えられた整数以上の類数を持ち、かつ末尾急増型の連分数展開を持つ 2 次無理数から作られる極小型実 2 次体の無限族を、6 以上の各偶数周期毎に与えた。

一方、次のようなデータがある。 n を 8 以上 60306 以下の偶数とする。4 を法として 2 または 3 と合同な平方でない正の整数 D の中で D の平方根の連分数展開の周期が n となるような最小の D に対し、 D は平方因子を持たず、 D の平方根の連分数展開は必ず末尾急増型であり、さらに判別式 $4D$ の実 2 次体は周期 n の極小型実 2 次体で類数 1 を持つ。従って、極小型や末尾急増型の研究は、類数が 1 の実 2 次体を得るための一つのアプローチである

と研究代表者は考える。まずは上記で述べた D の構成法を与えることを今後の研究課題としている。

(5) 島根大学の青木美穂氏との共同研究として、定数項が 1 となる整数係数を持つあるパラメトリックな 4 次多項式を考え、ある条件の下で、この多項式の根を添加した 4 次体の基本単数系を多項式の根を用いて記述した。今回得られた単数を利用して、類数が 5 で割れるような 4 次巡回体の族を得ることが期待されるが、現時点では新しい結果は得られなかった。これについては、今後の課題としている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

F. Kawamoto, Y. Kishi and K. Tomita, Construction of positive integers with even period of minimal type, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 90 (2014), 27--32. 査読有.

Y. Kishi, S. Tajiri and K.-i. Yoshizuka, On positive integers of minimal type concerned with the continued fraction expansion, Math. J. Okayama Univ. 56 (2014), 35--50. 査読有.

Y. Kishi, On the 3-rank of the ideal class group of quadratic fields, Kodai Math. J. 36 (2013), no. 2, 275--283. 査読有.

Y. Kishi, Imaginary cyclic fields of degree $p - 1$ whose ideal class groups have p -rank at least two, Publ. Math. Debrecen 81 (2012), no. 3-4, 447--452. 査読有.

岸康弘, ある 2 次無理数の連分数展開について, GCOE レクチャーノート報告集第 35 巻, 2011, 40--63. 査読無.

[学会発表](計 12 件)

河本史紀, 岸康弘, 富田耕史, 鈴木浩志, 末尾急増型主要対称部分の構成法 (pre-ELE 型有限列の増殖変換), 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 愛媛大学, 2013 年 9 月 24 日.

河本史紀, 岸康弘, 富田耕史, 偶数周期の

連分数展開と末尾急増型主要対称部分, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 愛媛大学, 2013 年 9 月 24 日.

Y. Kishi, Continued fraction expansions with even period and primary symmetric parts with extremely large end, 28th Journées Arithmétiques, University Joseph Fourier Grenoble I, France, 2013 年 7 月 2 日.

岸康弘, 偶数周期の連分数と末尾急増型主要対称部分, 北陸数論セミナー, 金沢大学サテライトプラザ, 2013 年 6 月 6 日.

岸康弘, 偶数周期の連分数と末尾急増型主要対称部分, 愛知数論セミナー, 愛知工業大学, 2013 年 2 月 16 日.

岸康弘, Continued fraction expansion with even period and a primary symmetric part with extremely large end, 九州代数的整数論 2013, 九州大学, 2013 年 2 月 13 日.

岸康弘, 代数体のイデアル類群と類数の可除性について, 電通大セミナー, 電気通信大学, 2012 年 12 月 12 日.

岸康弘, 2 次体の類数の可除性と不定方程式, 北陸数論セミナー, 金沢大学サテライトプラザ, 2012 年 5 月 24 日.

岸康弘, 吉塚健一郎, ある 2 次無理数の連分数展開について II, 第 126 回日本数学会九州支部例会, 九州工業大学, 2012 年 2 月 11 日.

岸康弘, 連分数展開に関する極小型自然数について, 愛知数論セミナー, 名古屋工業大学, 2012 年 1 月 21 日.

岸康弘, ある 2 次無理数の連分数展開について, 計算機代数システムの進展, 九州大学, 2011 年 8 月 29 日.

岸康弘, ある連分数展開を持つ 2 次無理数と極小型の実 2 次体について, 北陸数論セミナー, 金沢大学サテライトプラザ, 2011 年 6 月 9 日.

〔その他〕

ホームページ等

<http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~ykishi/paperE.html>

<http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~ykishi/talkE.html>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

岸 康弘 (KISHI, Yasuhiro)
愛知教育大学・教育学部・准教授
研究者番号 : 60380375

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし