

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 20 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540020

研究課題名(和文) レゾルベント型跡公式の一般化と細分化による保型形式とゼータ関数の研究

研究課題名(英文) Study of automorphic forms and zeta functions by using generalized or refined resolvent type trace formulas

研究代表者

権 寧魯 (GON, Yasuro)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：30302508

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円、(間接経費) 1,080,000円

研究成果の概要(和文)：保型形式やゼータ関数の研究に役立つレゾルベント型跡公式の一般化や細分化について研究した。ヒルベルトモジュラー曲面に対する1変数、または2変数のセルバーグ型やルエル型ゼータ関数の解析的性質を証明した。併せて、素測地線型定理やヒルベルト-マース形式に作用する制限されたラプラシアン正規化行列式公式を証明した。

研究成果の概要(英文)：We investigated a generalization or refinement of resolvent type trace formulas, which is useful for studying automorphic forms and zeta functions. Based on our results, we proved analytic properties of zeta functions of Ruelle and Selberg type in one or two variables for Hilbert modular surfaces. Besides, we also proved a prime geodesic type theorem and a regularized determinant formula for restricted Laplacians on Hilbert-Maass forms.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論 保型形式

1. 研究開始当初の背景

セルバーグ跡公式は保型形式やゼータ関数を研究するための強力な道具の一つであるが、扱う群の階数が高い場合、跡公式自身がスペクトル辺、幾何学的辺ともに大変複雑な形をしており、直接的な整数論への応用に向かない。数論的な応用に適した跡公式は何か？という視点から、跡公式と本質的に同等な情報を含んでいるレゾルベント跡公式やそれらの一般化である“より扱いやすい”「レゾルベント型跡公式」の研究の必要性が認識された。現在、さまざまな方向への跡公式の単純化や一般化が研究されており、保型形式の整数論の研究において重要な成果を挙げている。本研究ではこれらの研究手法を、「レゾルベント型跡公式」に適用できないかと思うに至り、「レゾルベント型跡公式」の整数論への応用に適した様々な方向への更なる一般化や細分化の研究を行い、得られた跡公式に基づいた保型形式やゼータ関数の研究をすすめるに至った。

2. 研究の目的

セルバーグ跡公式に代わるものとしてレゾルベント跡公式もしくはそれらの一般化である「レゾルベント型跡公式」の細分化について研究する。具体的には以下の：(1)、(2)について、セルバーグ跡公式と「レゾルベント型跡公式」の細分化およびその数論的応用を研究する。

(1) 階数 1 の群の直積や階数 2 の群に対するセルバーグ跡公式を特定の K タイプの組について書き下して、それらの K タイプに関する跡公式の“差分”を計算して「セルバーグ跡公式の差分」を求める。また、これらの群上で特異点を許し、異なる K タイプを持つ球関数からグリーン関数をそれぞれ作り、それらを核とする積分作用素の跡を計算したレゾルベント型跡公式の差分を計算して「レゾルベント型跡公式の差分」を明示的に求める。

(2) 上で得られた「跡公式の差分」に基づいて、数論的な応用を考察する。例えば、跡公式の差分を用いて、多変数のセルバーグ型ゼータ関数やルエル型ゼータ関数を定義し解析的性質を研究する。それらのゼータ関数の解析的性質から、代数体の類数分布や代数体の整数環係数の二次形式の類数などについての漸近公式を研究する。

3. 研究の方法

(1) ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ跡公式を非自明な重さを持つ場合に、より詳しく調べる。既に得られている重さ $(0, 4)$ 以上の場合の跡公式の差分とセルバーグ型ゼータ関数についての結果と手法を参考に、重さ $(0, 2)$ の場合に跡公式の差分をより明示的に計算する。対応するセルバーグ型ゼータ関数の解析的性質がわかれば、同時にルエル型ゼータ関数の解析的性質がわか

る。また、自明零点の位数を計算する際にはヒルベルトモジュラー曲面のオイラー標数のザギエによる公式を用いる。次に、イバニエッチがモジュラー群の場合に素測地線定理を得る際に用いた試験関数を参考に、重さ $(0, 2)$ の跡公式の差分から素な「双曲 - 楕円共役類」に対応する「素測地線型定理」をヒルベルトモジュラー曲面の場合に研究する。あとはこの結果を実二次体の整数環係数の二次形式の類数の言葉で書きなおす。

(2) 多変数のセルバーグ型ゼータ関数の定義は未だ定まっていないが、ダイトマールの“セルバーグゼータ関数の対数微分が多変数化”を参考に先ず 2 変数の例を考察する。具体的にはヒルベルトモジュラー曲面に対する跡公式において、総双曲共役類の寄与がダイトマールの 2 変数セルバーグ型ディリクレ級数になるように試験関数を選び、幾何学的辺における他の共役類からの寄与を計算する。特に、双曲楕円共役類が問題となるがこの寄与を重さをいろいろ動かした際の一変数のセルバーグ型ゼータ関数の無限族に関連付けて計算する。次に上記で選んだ試験関数を 2 番目の変数に関して少し変形した試験関数を用いて同様の計算を実行する。最後にこれらのディリクレ級数の解析的性質を調べて、得られる漸近公式を相対二次拡大体の言葉で書き表す。

(3) ヒルベルトモジュラー曲面に対するヒルベルトマース形式に作用する二つのラプラシアン固有値の組の列に対するゼータ正規化積を考察するには、いくつかの定式化の可能性がある。今回は 2 番目の固有値を特定した“1 番目の固有値の列”に対するスペクトルゼータ関数を考察した。ヒルベルトモジュラー曲面に対する跡公式の差分のスペクトル辺が上記スペクトルゼータ関数の逆メリン変換であるテータ型関数になるように試験関数を選び、このテータ型関数の極を調べる。この方法で、スペクトルゼータ関数の原点での正則性がわかり、ゼータ正規化積の明示的な形が計算できる。

4. 研究成果

(1) ヒルベルトモジュラー曲面に対するルエル型ゼータ関数とその数論的応用について研究した。 K を類数 1 の実 2 次体とすると、その整数環の元を成分にもつ次数 2 の特殊線形群であるヒルベルトモジュラー群を考える。この群は上半平面二つの直積に不連続に作用し、この作用による(非コンパクトなカスプ付き)商空間をヒルベルトモジュラー曲面という。ヒルベルトモジュラー曲面に対するルエル型ゼータ関数は重さ $(0, 2)$ のセルバーグ型ゼータ関数を用いてかけるので、対応するセルバーグ型ゼータ関数の解析的性質について詳しく調べた。この重さのセルバーグ型ゼータ関数の全平面への有理型解

析接続を示し、零点と極の位置と位数、関数等式に現れる局所因子をすべて決定した。特に、自明零点の位数がヒルベルトモジュラー曲面のオイラー標数を用いてかけることが分かり、幾何的にも興味深いと言える。数論的な応用として、ヒルベルトモジュラー曲面に対する、原始的双曲 楕円共役類に対応する「素測地線定理」を誤差項付きで証明した。併せて、証明の鍵となるヒルベルト マース形式の存在に関する固有値分布の「ワイルの法則」も証明した。ワイルの法則を導く際に、ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ跡公式に現れる、散乱行列式が実2次体のヘッケL関数とそのガンマ因子を用いて具体的にかけることが証明の際に重要であった。また、ルエル型ゼータ関数の数論的表示を用いて、実2次体Kの整数環係数の不定値2元2次形式の類数と和の漸近公式を導いた。

(2) 多変数のセルバーグ型ディリクレ級数とその数論的応用について研究を行った。現在まで、多変数のセルバーグ型ゼータ関数の定義はよくわかっていないが、ダイトマールによって定義された、高階数の局所対称空間に対して定まる多変数のディリクレ級数がひとつの候補と考えられている。このディリクレ級数は階数が1のときは通常のセルバーグゼータ関数の対数微分と一致する。ダイトマールはこの多変数のセルバーグ型ディリクレ級数をコンパクトな局所対称空間に対して定義し、その多変数複素関数としての性質やその解析的性質から対応する素測地線定理を証明した。証明の際にはセルバーグ跡公式の単純化にあたる“レフシェッツ型公式”がポイントであった。今回は実二次体のヒルベルトモジュラー群に対して、二変数のセルバーグ型ディリクレ級数を定義しその解析的性質を研究した。ヒルベルトモジュラー群は非コンパクトなので、ダイトマールのレフシェッツ型公式を適用出来ないことに注意する。代わりに、セルバーグ跡公式の幾何学的辺の総双曲共役類がこの二変数ディリクレ級数になるようなテスト関数を取るとき、双曲 - 楕円共役類の寄与がある一変数のセルバーグ型ディリクレ級数の無限族を用いて表示できることが証明できた。この方法を用いると、非コンパクトな場合でもこの二変数のセルバーグ型ディリクレ級数の解析接続を得られることがわかった。応用として、与えられた実二次体の整数環係数の二元二次形式で判別式が総正なもの、ふたつの基本単数の大きさで並べた、類数の和の漸近公式が得られる。同じ設定で、ひとつの基本単数に関する密度関数を掛けた類数と和の漸近公式についても同様に得られることがわかった。

(3) ヒルベルト マース形式に作用するラプラシアン固有値の組に関するゼータ正規

化積について研究を行った。その際に、重さ(0,2)のセルバーグ型ゼータ関数の平方根ともいべき“1/2次のオイラー積”をもつセルバーグ型ゼータ関数を新たに定義し、ヒルベルトモジュラー曲面のオイラー・ポアンカレ標数が偶数であるという仮定の下、全平面への有理型解析接続や正規化行列式表示を証明した。重さ(0,2)のヒルベルト マース形式の空間に作用する1番目のラプラシアンのある部分空間への制限に関するスペクトルゼータ関数を考察し、そのスペクトルゼータ関数が原点で正則であることを示した。結果として、平方根型セルバーグゼータ関数の上記の意味での制限されたラプラシアンに関する正規化行列式表示を得ることが出来た。併せてこの制限されたラプラシアンの正規化行列式のこのセルバーグ型ゼータ関数の特殊値を用いた表示を得た。重さが4以上の場合の制限されたラプラシアンについては、今回定義した平方根型セルバーグゼータ関数と以前に定義されたその解析的性質がわかっている重さ4以上のセルバーグ型ゼータ関数をいくつか組み合わせることで、同様に正規化行列式表示が得られることが証明できた。そういった点からも今回定義された研究された平方根型セルバーグゼータ関数が重さ4以上の場合の研究においても重要であることがわかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Y. Gon, Selberg type zeta function for the Hilbert modular group of a real quadratic field, Proc. Japan Acad. 88A (2012), 145-148. doi:10.3792/pjaa.88.145. 査読有

M. Tsuzuki, Spectral average of central values of automorphic L-functions for holomorphic cusp forms on $SO(m, 2)$, I.

J. Number Theory 132 (2012), no.11 2407-2454. doi:10.1016/j.jnt.2012.04.020 査読有

権 寧魯, セルバーグ跡公式, セルバーグゼータ関数, 第18回整数論サマースクール報告集「アーサー・セルバーグ跡公式入門」, (2011), 21-50. 査読なし

[学会発表](計12件)

Y. Gon, Zeta functions of Ruelle and Selberg for Hilbert modular surfaces, 研究集会“Geometric zeta functions and related topics”, 2013年10月30日, 佐賀大学

Y. Gon, The square root of Selberg type zeta functions and determinants of restricted Laplacians, 研究集会“Zeta functions in OKINAWA 2013”, 2013年10月

20日, 沖縄コンベンションセンター

Y. Gon, Selberg type Dirichlet series in two variables, 金沢数論ミニ集会, 2012年11月30日, 金沢大学

Y. Gon, Selberg type Dirichlet series in two variables, 研究集会“Zetas and Limit Laws 2012”, 2012年11月19日, フェストーネ, 沖縄県宜野湾市

Y. Gon, Class numbers of binary quadratic forms and Ruelle type zeta functions for Hilbert modular varieties, Kyoto conference on automorphic forms, 2012年10月6日, 京都大学

Y. Gon, Zeta functions of Ruelle and Selberg types for Hilbert modular groups, 研究集会“Zeta Function 2012”, 2012年9月27日, 東京工業大学

Y. Gon, Zeta functions defined by class numbers of binary quadratic forms over rings of algebraic integers, 研究集会“Zeta Function 2012”, 2012年9月27日

権 寧魯, 2元2次形式の類数とヒルベルトモジュラー群に対するルエル型ゼータ関数について, 大阪大学整数論・保型形式セミナー, 2012年7月6日, 大阪大学

権 寧魯, 2元2次形式の類数とヒルベルトモジュラー群に対するルエル型ゼータ関数, 大岡山談話会, 2012年1月25日, 東京工業大学

Y. Gon, Class numbers of binary quadratic forms and Ruelle type zeta functions for Hilbert modular groups, 研究集会“Zetas and Limit Laws 2011”, 2011年11月28日, フェストーネ, 沖縄県宜野湾市

Y. Gon, Mahler measures and their generalization, 香川セミナー, 2011年10月15日, 香川大学

Y. Gon, Selberg type zeta functions for the Hilbert modular group of a real quadratic field, Workshop on L-functions, 2011年4月23日, 九州大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

権 寧魯 (GON, Yasuro)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号: 30302508

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

都築 正男 (TSUZUKI, Masao)

上智大学・理工学部・准教授
研究者番号: 80296946