様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年 　６ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６４１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００２７
研究課題名（和文）クンマー理論を巡って、群スキームの理論の観点から

研究課題名（英文）Around Kummer theories, from the view point of group schemes

研究代表者
諏訪　紀幸（Suwa, Noriyuki）

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：１０１９６９２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円、（間接経費）　　600,000円

研究成果の概要（和文）：　本研究の主な目的は、代数学の基本事項であるGalois理論では基本的な、そしてここ半世紀急激な進歩を遂げた数論幾何で最も重要な道具であるetale cohomologyの理論の出発点である、Kummer理論やArtin-Schreier理論を一般の可換環あるいはschemeの上で一般のfinite flat group schemeに対して定式化し、理論を展開することであった。
特に、Serreが有限群の群環の単数群を代数群とみなして体のGalois拡大の正規底を捉えなおす議論を展開していたが、finite flat group schemeに対してその議論を定式化することができた。

研究成果の概要（英文）：　It is a main purpose of our research to formulate and develop the theories analogous to the Kummer and Artin-Schreier theories, which are important items  of the Galois theory and the starting points of the theory of etale cohomology. Needless to say, the Galois theory is a basis of the modern algebra. And the theory of etale cohomology provides us with a powerful tool in arithmetic geometry, which has developed vastly during the past half a century.
In particular we obtain several results for finite flat group schemes, concerning to relations between normal bases of a cleft Hopf-Galois extension and the unit group scheme of a finite flat group  scheme. This is a natural generalization of Serre's arugument on relations between normal bases of a Galois extension of fields and the unit group of the group algebra of a finite groups.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：Kummer理論　Artin-Schreier理論　group scheme　torsor　Hopf代数　Hopf-Galois理論

## １．研究開始当初の背景

Kを体，Gを有限群とする．このとき，GをGalois群にもつKのGalois拡大が存在するか，存在するなら具体的な構成法を記述せよという問題は逆Galois問題とよばれ，今日でも非常に重要な問題である．Kummer理論やArtin-Schreier-Witt理論は，巡回群をGalois群にもつGalois拡大の簡潔な記述を与えている．

Kummer理論やArtin-Schreier-Witt理論はGalois理論の基本的な項目であり，特にKummer理論はLagrangeの分解式を用いた初等的な証明が知られている．おそらくそこに想を得てたのであろう，Serreは半世紀前に，Groupes algebriques et corps de classesにおいて次のような議論を展開した．

Gを有限群，Kを体とする．このとき，群環K[G]の可逆な元のなす乗法群U(G)はKの上の代数群の構造をもつ．さらに，体のGalois拡大に対する正規底定理から，標準的な全射U(G)->U(G)/GはGをGalois群にもつKのGalois拡大のversal familyであることが従う．

奇妙なことに逆Galois群の研究ではSerreの議論が等閑視されて来たようであるが，諏訪はSerreの議論を一般の環の上に一般化した．その中で，SerreがU(G)->U(G)/Gを削ってKummer理論やArtin-Schreier-Witt理論を導き出した手法をsculpture problemとして定式化し，それにembedding problemを付け加えて，議論を整備した．

Serreの議論を一般のfinite flat group schemeに定式化することは興味深い問題であろう．諏訪の学生だった津野祐司君に幾つかの示唆を与え，finite flat group schemeが可換である場合に研究を指導した．さらに，Hopf代数の分野では第一人者である増岡彰教授からcleft Hopf-Galois拡大の概念を教示していただいたことで，finite flat commutative group schemeの場合にSerreの議論を一般化する研究は完成に至った．この研究は津野君の学位論文となった．

それでは一般のfinite flat group schemeに対してはどうすればいいのか，定式化に手探りの状況であった．finite flat commutative group schemeの場合，Cartier dualityが本質的で，commutativeでない場合には適用できなかった．

## ２．研究の目的

本研究では，(1) 全射U(G)->U(G)/Gの解析を整数環の上で進める，(2) 一般のfinite flat group schemeに対してSerreの議論を定式化する，この二つが大きな目的であった．(1)に関しては，group scheme U(G)の構造は，Gが巡回群である場合でさえ，体の上での考察に比べて整数環の上での考察ははるかに晦渋である．また，(2)に関してはHopf-Galois理論におけるcleft拡大の概念が重要であった．

## ３．研究の方法

扱っている対象からすれば当然であるが，一般の環の上のgroup schemeの様々な先行結果，例えばDemazure，Gabriel共著の浩瀚なモノグラフGroupes Algebriquesで論述されている基本事項は不可欠の道具立てであった．さらに，generic fiberがof multiplicative type，special fiberがunipotentであるような離散付値環の上のcommutative group schemeを扱う必要もあるが，これについては，Kummer理論とArtin-Schreier-Witt理論を統合する理論に関する，関口力教授と諏訪が共同で進めて来た共同研究での様々な結果が重要な道具立てを提供した．関口教授と諏訪の共同研究の先行するものとして，WaterhouseとWeisfeilerによる離散付値環の上のgroup schemeの研究は重要であり，本研究にも影響を及ぼしている．

## ４．研究成果

(1) 論文[7]の殆どの結果は本研究の前に得られていたことであるが，本研究の一環として最後の推敲を進めた．

Gが巡回群の場合，Kummer理論やArtin-Schreier理論，Kummer-Artin-Schreier理論，さらに，quadratic-twist Kummer理論，quadratic-twist Kummer-Artin-Schreier理論に対しては，論文[6]において，徹底的に議論した．しかし，Artin-Schreier-Witt理論については手を付けなかった．SerreがArtin-Hasse exponential seriesを用いてsculpture problemを鮮やかに解いていて，embedding problemは取り上げるまでもないと想像していたからである．

しかし，いざembedding problemを考察してみると，Serreの議論をなぞることはできない．そこで試行錯誤の末，関口教授との共著論文[5]において定義したArtin-Hasse exponential seriesの一般化を用いたら，Kummer-Artin-Schreier sequenceに対するembedding problemが肯定的に解けた．この結果の一つの帰結として，標数p>0の環の不分岐p巾巡回拡大はすべて正規底をもつことが分かった．さらに，手間さえ厭わなければ，正規底の生成元を書き下すこともできる．Artin-Schrier拡大の場合，Lagrangeの補間多項式によって正規底の生成元が書けることは周知の事実である．そこで，Kが標数2でGが位数4の巡回群の場合を観察して正規底の生成元が簡明な形であることを期待したが，Kが標数2でGが位数8の場合や，Kが標数3でGが位数9の場合に正規底の生成元を求めてみると，そのような期待は甘いものであったことが判明した．

さらに副産物として，国吉秀夫教授が論文[4]で得ていた結果に新たな光を当てることができた．Gを有限群，Kを体，RをGを添字集合とするKの上の有理式の体とすれば，G

はRに作用する．不変体R^GはKの上に有理的かと問うのがNoether問題であるが，国吉教授は，Kが標数p>0, Gが位数pの巡回群であれば，不変体R^GはKの上に有理的であることを示した．また，続篇の論文で，Kが標数p>0, Gがp群である場合にも，不変体R^GはKの上に有理的であることを示している．

論文[7]ではGが位数がp巾の巡回群の場合，標数p>0の環の上でU(G)に対するsculpture problemとembedding problemを議論しているが，その過程でgroup scheme U(G)/GがU(G)に同型であることを示した．不変体R^GはU(G)/Gの有理函数体に他ならないので，この場合Noether問題が肯定的に解けていることを意味する．手間さえ厭わなければ，不変体R^Gの生成元を列挙することもできる．Kが標数2でGが位数4の巡回群の場合でも，見せられば不変式であることはすぐに確認できても，いざ見付けるとなると二の足を踏みそうな有理式である．

[4]は６０年前に発表された論文であるが，まさに温故知新であった．

(2) 一般のfinite flat group schemeに対してSerreの議論を定式化することについてであるが，Group algebras and normal basis problemとの題名で論文にまとめ，[8]として中欧大学リポジトリのウェブサイトで公開した．また，学術雑誌に投稿しているところである．

Serreの議論では有限群Gの群環の可逆な元のなす乗法群を代数群あるいはgroup schemeとして考えるのが議論の鍵であったが，A. Alvarez, C. Sancho, P. Sanchoの共著論文[1]でgroup schemeに対して群環の相当するring schemeが構成されていて，それを用いれば,一般のfinite flat group scheme Gに対してgroup scheme U(G)が定義されることが分かった．Gが有限群の場合，U(G)は元々のU(G)と一致する．さらに，自然な全射U(G)->U(G)/Gはgroup scheme Gに対するcleft Hopof-Galois拡大のversal familyであることも示した．Gが有限群である場合，group scheme Gに対するcleft Hopof-Galois拡大はGをGalois群とする正規底をもつGalois拡大に他ならない．したがって，[8]ではSerreの議論の自然な一般化を得たと言えよう．

この結果を増岡彰教授に知らせたところ，Hopf-Galois理論における研究動向を教えていただいた．そこで幾つかの文献に目を通したところ，竹内充弘教授が論文[11]において，体の上ではあるが非可換なHopf代数の場合も含めて，U(G)に相当するHopf代数を構成していたことが分かった．逆に言えば，Hopf代数が可換な場合に限るとしても，[2]は竹内教授の研究の代数幾何的な解釈を与えていることになる．

(3) Kummer理論の一般化として，木田雅成教授は論文[2][3]においてWeil restrictionに対するKummer理論とnorm torusに対するKummer理論を考察している．[2][3]の興味の中心はそれぞれのKummer理論がalgebraic torusのisogenyによって記述できるかにあった．

論説[9][10]では，木田教授が考察を進めたWeil restrictionに対するKummer理論とnorm torusに対するKummer理論を，sculpture problemとembedding problemの観点からを見直し，幾つかの結果を得た．

例えば，Gを位数nの巡回群，Rを整数環Zに1のn乗根を添加して得られる環，Tをmultiplicative group schemeの環の拡大R/Zに関するWeil restrictionとする．このとき，

(a) nが奇数なら，G->Tに対するsculpture problemはZの上で肯定的，

(b) nが偶数なら，G->Tに対するsculpture problemはZ[1/2]の上で肯定的．

また，G->Tに対するembedding problemが肯定的であるための必要充分条件を与えた．これから次が導ける．

(a) nが偶数>3なら, G->Tに対するembedding problemはQの上でs上で否定的．

(b) nが奇素数pの巾なら，G->Tに対するembedding problemはZ[1/p]の上で肯定的．

次に，T’をnorm torusのZの上のmodelとする．このとき，

(a) nが奇数なら, G->T’に対するsculpture problemはZ[1/n]の上で肯定的．

(b) nが偶数>3なら，G->T’に対するsculpture problemはQの上で否定的．

(c) G->T’に対するembedding problemがZ[1/n]の上で肯定的 ⇔ G->Tに対するembedding problemがZ[1/n]の上で肯定的．

以上のように，[2][3]で提起された対象に対して考察を深めることができた．

参考文献

[1] A. Alvarez, C. Sancho, P. Sancho, Algebra schemes and their representations. J. Alg. 296 (2006) 110-144

[2] M. Kida, Kummer theory for norm algebraic tori, J. Algebra 293 (2005), 427-447

[3] M. Kida, Descent Kummer theory via Weil restriction of multiplicative groups, J. Number Theory 130 (2010), 639-659

[4] H. Kuniyoshi, On a problem of Chevalley. Nagoya Math. J. 8 (1955) 65-67

[5] T. Sekiguchi, N. Suwa, A note on extensions of algebraic and formal groups IV. Tohoku Math. J. 53 (2001) 203-240

[6] N. Suwa, Around Kummer theories. RIMS Kokyuroku Bessatsu B12 (2009) 115-148

[7] N. Suwa, Artin-Schreier-Witt

extensions and normal bases. Hiroshima Math. J. 44 (2012) 325-354
[8] N. Suwa, Group algebras and normal basis problem. Preprint series No.103, 中央大学 (2013)
[9] N. Suwa, algebraic torus に対する Kummer 理論と正規底問題.「早稲田大学整数論研究集会２０１３」報告集 (2013) 1-15
[10] N. Suwa, Kummer theory for algebraic tori and normal basis problem: some examples.「福岡数論研究集会２０１３報告集」(2014)
[11] M. Takeuchi , Free Hopf algebras generated by coalgebras. J. Math. Soc. Japan 23 (1971) 561-582

## ５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

[1] N. Suwa, Artin-Schreier-Witt extensions and normal bases. Hiroshima Math. J. 44 (2012) 325-354

〔学会発表〕（計 2 件）

[1] N. Suwa, Kummer theory for algebraic tori and normal basis problem: some examples. 福岡数論研究集会，九州大学，'13.8.10.

[2] N. Suwa, Kummer theory for algebraic tori and normal basis problem. 早稲田大学整数論研究集会，早稲田大学，'13.3.16.

〔図書〕（計 2 件）

[1] N. Suwa, A. Shiho, K. Sato (eds), Algebraic Number Theory and Related Topics 2011. RIMS Kokyuroku Bessatsu B44 (2013)

[2] M. Kida, N. Suwa, S. Kobayashi (eds), Algebraic Number Theory and Related Topics 2010. RIMS Kokyuroku Bessatsu B32 (2012)

## ６．研究組織
(1)研究代表者

諏訪 紀幸（SUWA, Noriyuki）
中央大学理工学部 教授
研究者番号：10196925