様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２６年　６月　９日現在

機関番号：３２６４１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００２８
研究課題名（和文）Ｋ３楕円曲面のモーデル・ヴェイユ格子の研究

研究課題名（英文）Mordell-Weil lattices of elliptic K3 surfaces

研究代表者
鍬田　政人（Kuwata, Masato）

中央大学・経済学部・教授

研究者番号：００３４３６４０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円、（間接経費）　690,000円

研究成果の概要（和文）：K3曲面上には楕円曲面の構造が複数存在し得るが、それらを分類し、各楕円曲面についてMordell-Weil格子の構造をできるだけ具体的に記述するという問題を、Kummer曲面と密接な関係をもつK3曲面について研究した。最大の成果は、直積型のKummer曲面上の猪瀬の楕円曲面から構成されるMordell-Weil階数が16から18の楕円曲面について、そのMordell-Weil群の生成元を完全に決定したことである。この結果は海外連携研究者のAbhinav Kumar氏と平成24～25年度にわたってアメリカと日本で複数回綿密に議論することにより得ることができた。

研究成果の概要（英文）：A K3 surface can have many different elliptic fibrations. Our objective is to classify all elliptic fibrations on a given K3 surface, and describe their Mordell-Weil lattices explicitly. Our principal result was the explicit description of the generators of the Mordell-Weil group of the elliptic fibration of rank 16 to 18 obtained from the Inose fibration on a Kummer surface of product type. This result was made possible through a series of discussions with Prof. Abhinav Kumar of MIT held in the U.S. and Japan during the period between 2012 and 2013.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：K3曲面　楕円曲面

１．研究開始当初の背景

K3 曲面は代数幾何内だけにとどまらず数理物理学や数論など数学の様々な分野と深く関連する非常に興味深い研究対象であり，数論においても K3 曲面の有理点に関する研究は近年大きな発展を遂げている．なかでも，楕円曲面の構造を持つ K3 楕円曲面は楕円曲線の族であるばかりでなく，標準束が自明であるという意味でも楕円曲線の 2 次元版と捉えることができ，二重の意味で楕円曲線の数論と深く結びついた非常に興味深い研究対象であって，いろいろな視点から様々な研究が行われて来た．

K3 曲面の幾何学的性質は Torelli の定理を通じて格子の問題として捉えることができ，この方法を用いて K3 曲面上には楕円曲面の構造の同型類は有限個しかないことが証明できたりする．また，ある種の K3 曲面の族についてはその曲面上に存在する楕円曲面の構造の同型類を群論的に分類することも行われている．しかし，このように群論を通じて存在が示される K3 楕円曲面を方程式によって具体的に記述することは容易ではなく，楕円曲面の構造をあたえる写像（楕円パラメータ）を具体的に記述し Weierstrass 方程式を書くという問題に対する結果は本研究を開始した時点ではあまり多くは得られていなかった．個々の曲面の性質をさらに詳しく調べるにあたってはこのような楕円パラメータを具体的に記述することが強く望まれ，このような研究なしには楕円曲面の Mordell-Wei 格子についてその生成元を具体的に表すという問題も扱いようがないからである．　楕円曲面の数論的性質は Weierstrass 方程式を具体的に書き，その Mordell-Weil 格子の生成元を特定することで初めて明らかになることも多いからである．

２．研究の目的

K3 曲面 X が与えられたとき，① X 上の楕円曲面の構造をすべて分類し，② そのひとつひとつの楕円曲面について Weierstrass 方程式を書き，　③ その Mordell-Weil 格子の生成元をすべて求め，具体的に記述する，という一連の問題を，広い範囲の K3 曲面に対してできるだけ詳細な結果を得ることを目的とする．そのために，対象とする K3 曲面を数論的観点から応用上重要なものに限ることにした．Kummer 曲面とそれに密接に結びついた K3 曲面は数論の観点からとりわけ重要なので，これらの K3 曲面を中心に扱うこととした．

①の段階が問題となる K3 曲面については，種数 2 の曲線の Jacobi 多様体 $J(C)$ から得られる Kummer 曲面 $\mathrm{Km}(J(C))$ について主に考察した．一方，二つの同種でない楕円曲線の直積から得られる Kummer 曲面の場合については①の段階の楕円曲面の構造の分類は小木曽啓二氏により 1980 年代なかば頃に完成され，②や③の段階についても，2005 年に塩田氏との共同研究で解決されている．このような直積型 Kummer 曲面には猪瀬ファイブレーションと呼ばれる楕円曲面の構造が存在し，その有限被覆を取ることにより，Mordell-Weil 格子の階数の大きいもの（16 から 18 であるもの）が得られることが知られている．これらについては③の段階の問題である Mordell-Weil 格子の生成元をすべて具体的に記述することが大きな課題となる．この問題の解決を目指すことも本研究の大きな目的の一つである．

３．研究の方法

（１）種数 2 の曲線 C の Jacobian $J(C)$ から得られる Kummer 曲面 $X=\mathrm{Km}(J(C))$ の場合，X のどのようなモデルを選び，それをどのような定義方程式で表すかが最初の問題となる．関数体 $k(X)$ をどう表わすかを定めなけ

れば，楕円曲面の構造を具体的にどのように表すかが定まらないからである．X は $\mathbb{P}^5$ 内の 3 つの 2 次曲面の交わりとして得られるが，古典的な方程式は数論的研究には適さないものが多かった．$J(C)$の 2 等分点に由来する Km($J(C)$)に含まれる 32 の直線の所在と定義方程式との関係をまず明らかにすることが，楕円曲面の構造の具体的記述には必要不可欠となる．例えば C が $y^2 = x(x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ という単純な形に表わされているとしても，この関係は単純ではないが，これをなるべく一般の C について行う．また，これらと Clebsch-井草の不変式との関係についても調べたい．

（２）２つの楕円曲線の直積から得られる Kummer 曲面については，楕円曲面の構造の分類よりも，それから得られる楕円曲面の Mordell-Weil 格子の生成元を具体的に記述することが大きな課題となる．2 つの楕円曲線 E_1 と E_2 が同種，あるいは同型である場合の直積型 Kummer 曲面 Km($E_1 \times E_2$)，さらには Picard 数が標数 0 の体上の K3 曲面での最大値 20 である，いわゆる「特異 K3 曲面」を中心に研究を進める．特異 K3 曲面の中にはいわゆる楕円モジュラー曲面も含まれているが，このような曲面は数論的に興味が深く，しかも比較的簡単な方程式で表されており，Mordell-Weil 格子の生成元を計算機を用いて求めてみることも現在の計算機の能力を持ってすれば不可能ではない．こうして得られた結果が一般論の解決に繋がることも十分に期待される．

４．研究成果

（１）Kummer 曲面 Km($J(C)$)については，本研究にいたる前の段階の研究に興味を持ち，協力をしてくれていた Abinav Kumar 氏が，Km($J(C)$)上の楕円曲面のうち，0-切断をもつものについて分類に成功したことを平成 22 年夏に発表した．平成 23 年 8 月にトロント・フィールズ研究所で開催された研究集会“Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds”において Kumar 氏と直接討論する機会を得たので，氏の結果を拡張して Km($J(C)$)上に存在する楕円曲面の構造のうち切断を持たないものを分類することの可能性を探った．このような楕円曲面の構造をもとにして，直積型 Kummer 曲面の場合と同様の有限被覆の方法により Mordell-Weil 格子の階数が 15 になる楕円曲面が構成できることがわかっていたのだが，Kumar 氏と協力してこのような楕円曲面の構造について詳しく調べた．Noam Elkies 氏によって，複数の楕円曲面の構造の間に“2-neighbor”という概念が導入され，2-neighborの連鎖を用いて1つの楕円曲面の方程式から別の楕円曲面の方程式を次々に得るという手法が確立されているが，Kumar 氏はこの手法を駆使して Mordell-Weil 格子の階数が 15 となる楕円曲面の方程式を書くことに成功した．そこで，この楕円曲面の Jacobian の Mordell-Weil 格子の生成元をもとめる方法について討論し，15 の 1 次独立な元を求める方針を確立した．

（２）階数が 15 の Mordell-Weil 格子の生成元を求める方法は，長年の懸案であった直積型 Kummer 曲面 Km($E_1 \times E_2$)をもとにして構成される階数 18 の Mordell-Weil 格子をもつ楕円曲面の生成元を求める問題にも応用出来ることがわかった．しかも，具体的な計算はこちらの方が扱いやすいこともわかった．この方面の先行結果として，塩田徹治氏による一つの具体例の詳しい計算結果があったが，それを含むより一般的な形で Mordell-Weil 格子の生成元を求める方法を確立し，さらに具体的な計算についても遂行し，いくつもの例について生成元をすべて書き上げることに成功している．その際に鍵となったのは E_1

および E_2 の等分点の構造であり，これによりMordell-Weil 格子の定義体の数論的意味についても明らかとなりつつある．
また，この問題から派生して，Mordell-Weil 階数 18 の楕円曲面の構造をもつ特異 K3 曲面のうち，有理数体上定義されるものはどれくらいあるかという問題を考察した．特異 K3 曲面は正定値 2 次形式によって分類されるが，2 次形式の種数が 2 のものから Mordell-Weil 階数 18 の楕円曲面の構造を持つ有理数体上定義される特異 K3 曲面が得られる．そこで，このような 29 個の 2 次形式について，対応する特異 K3 曲面の有理数係数の方程式を書くことに成功した．これらの特異 K3 曲面上にある猪瀬ファイブレーションの Mordell-Weil 格子の生成元についても，それを求める一般的な方法を得た．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
Jack Fearnley, Hershy Kisilevsky, <u>Masato Kuwata</u>, Vanishing and non-vanishing Dirichelet twists of L-function of elliptic curves, Journal of London Mathematical Society 86 2012 539-557

〔学会発表〕（計２件）
<u>Masato Kuwata</u>：“Elliptic surface with Mordell-Weil rank 18”, Intercity Number Theory Seminar in the Netherlands（招待講演）, University of Groningen, 平成 26 年 2 月 28 日

<u>Masato Kuwata</u>：“3-torsion points of curves of genus 2 and rational elliptic threefolds”, 早稲田整数論研究集会（招待講演）, 早稲田大学, 平成 24 年 3 月 21 日

〔その他〕
ホームページ等
http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/~kuwata/

６．研究組織
(1)研究代表者
鍬田　政人　（KUWATA MASATO）
中央大学・経済学部・教授
研究者番号：００３４３６４０

(2)研究分担者
該当なし
(3)連携研究者
該当なし