

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 10 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540032

研究課題名(和文)実解析的アイゼンシュタイン級数を含む多重級数の研究

研究課題名(英文)On some multiple series which include the real analytic Eisenstein series

研究代表者

野田 工(NODA, Takumi)

日本大学・工学部・准教授

研究者番号：10350034

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円、(間接経費) 1,020,000円

研究成果の概要(和文)：Barnes型の二重Eisenstein級数のFourier級数型変換,漸近公式とその応用として特殊値等の表示式に関する成果を得た。また上記研究成果の発展・応用として、航空力学における空力干渉計算に現れる二重級数の数値計算への応用を与えた。GlauertおよびOliverの変換公式が正則,非正則 Eisenstein級数のFourier級数型展開式の類似であることを看取り,これら空力干渉計算に現れる二重級数を含むEisenstein級数を新たに定義した。さらに多重ゼータ関数における手法を用いて,Fourier級数型展開式(急減少変換式)をMellin-Barns型積分を経由して導出した。

研究成果の概要(英文)：Our main achievement of the present project is to establish a transformation formula of some Barnes' type double Eisenstein series. We obtained a asymptotic expansion and various explicit formulas of the specific value of these Eisenstein series. The double analog of the Lipschitz formula via the Mellin-Barns integral transformation is the key ingredient in our proof. We also derived a transformation formula for a certain kind of Eisenstein series occurs in aerodynamic interference calculations, which provides extensive understanding of some double series in wind-tunnel wall corrections.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

 キーワード：数論 解析的整数論 アイゼンシュタイン級数 多重ゼータ関数 Mellin-Barns積分変換 Lipschitz  
公式 風洞壁干渉計算

1. 研究開始当初の背景

(1) **L 関数の零点の明示公式** : Rankin-Selberg L-関数の零点と尖点形式の Fourier 係数とを結びつける明示公式を導出していた。これは保型 L-関数の零点と Hecke 固有値とを関連付ける公式である。証明には Sturm による C - 級保型形式の射影と Zagier のアイデアを用い、Eisenstein 級数の増大度の確認、合流型超幾何関数の解析接続と Laplace -Mellin 変換を実行している。主結果は Hilbert と Pólya の作業仮説(1915年頃)にも符合するものである。特に下記のような知見が新たに得られたことに意義があった。

L-関数の零点と自己共役作用素を結びつける明示公式が得られたこと。

L-関数の Reimann 予想と同値な命題が Hecke 固有値を用いて表示できたこと。保型 L-関数の特殊値(周期)には大きい重さの尖点形式が現れることが志村によって証明されている。しかし我々の零点に関する主結果は小さい重さの尖点形式の Fourier 係数を用いて記述される。このような新しい現象を見出したこと。

(2) **Eisenstein 級数の複素挙動** : 実解析的 Eisenstein 級数の漸近展開式から上半平面の虚軸変数を分離した convexity bound を条件付きで確認していた。目標は sub-convexity bound であるが、虚軸の変数を分離した凸性評価を得たことは研究の正当性を支持するものである。また、評価式の虚軸変数に関する制限も解消されつつあり、保型 L-関数への適用やスペクトル理論への応用を目標としている。

(3) **Eisenstein 級数の漸近展開** : モジュラー群上の実解析的 Eisenstein 級数の上半平面虚軸方向に関する完全漸近展開を与えた。証明では Maass 作用素と Ramanujan 級数を用いる。この漸近展開式から Fourier 級数展開、固有関数等式、極の位置、特殊値の表示、Kronecker 極限公式などの別証明が得られる。主結果は Maass による結果(1960年代)にも符合するものである。

(4) **Lipschitz 公式の二重化** : Lipschitz の公式の(正則・非正則の)二重化に成功した。証明は Poisson の和公式を用いるものではなく、ある種の Mellin 逆変換型(Barnes 型)の積分変換公式を援用するものである。これら結果を用いて、(正則・非正則版)二重 Eisenstein 級数の変換公式を証明した。これらの変換公式は(正則および実解析的)Eisenstein 級数の Fourier 級数展開のそれぞれ拡張となっている。変換公式は Barnes 型積分表示を持つので積分路のシフトにより漸近展開が可能となる。正則二重 Eisenstein 級数の漸近展開を与え、特殊値の明示公式等の導出に明確な道筋を与えた。

2. 研究の目的

(1) **実解析的 Eisenstein 級数の複素挙動** : 実解析的 Eisenstein 級数の複素パラメーターに関する漸近展開式・和公式を与え、Eisenstein 級数の convexity bound の改良とスペクトル理論への応用を与える。上半平面虚軸方向に関する完全漸近展開とその応用を与える。

(2) **Eisenstein 級数の多重化** : Mellin 逆変換型(Barnes 型)の積分変換公式を拡張された Eisenstein 級数に対し適用する。目標は(正則および実解析的)Eisenstein 級数の Fourier 級数展開の拡張となるような、多重 Eisenstein 級数の変換公式とその応用を構築することにある。多重 Eisenstein 級数の適切な定式化を行い、多重ゼータ関数や多変数保型形式との関係、各種漸近展開の研究の相互関連、特殊値の性質など、数論的な応用を進展させることが目的である。

(3) **尖点形式や航空力学への拡張と応用** : 尖点形式の多重化を視野に入れ、一変数尖点形式に直結するゼータ関数を新たに導入する。また、航空工学・低音速風洞実験における干渉計算に出現する諸関数の解析数論の視点から包括的な定義を与える。保型性、関数等式など数論的性質の空力学に対する応用・解釈を行い、航空力学において新しい視点を与える。

3. 研究の方法

(1) **Bessel 関数の一様漸近展開** : 実解析的 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開に Bessel 関数等の特殊関数の漸近展開を適用する。ここで微分方程式の方法から得られた一様漸近展開を用いる。さらに漸近展開において残余項を評価し上からの評価を行っている。

(2) **Mellin-Barnes 型の積分変換公式** : Mellin 逆変換型(Barnes 型)の積分変換公式を拡張された Eisenstein 級数に対し適用した。この方法により(正則および実解析的)Eisenstein 級数の Fourier 級数展開の拡張となるような、多重 Eisenstein 級数の変換公式が得られる。また、さらに進んで Barnes 型積分表示を用いて漸近展開を得ることが出来る。

(3) **分離型 Mellin-Barnes formula** : 上半平面と下半平面のペアに関する二重化を行う場合、通常の二項関数に対する Mellin 逆変換型積分変換公式は偏角の広がりには対応できない。そこで実解析的 Eisenstein 級数の二重化を目的とする場合、より広範囲の偏角に対応が必要である。我々は適用可能な新しい分離型 Mellin-Barnes formula を導入した。これは超幾何関数における接続公式に Barnes 型積分表示を適用し特殊化した関係式である。ここから Lipschitz

公式の非正則版二重化を行い、非正則版二重 Eisenstein 級数の Fourier 級数型変換公式等を導出する。

(4) **多重級数の複素変数化:** 実変数である空力干渉計算上に現れる多重級数(多重)Eisenstein 級数型の上半平面上の関数に拡張する, さらに重さの複素変数化を行う。また Fourier 級数型変換公式を導出する。

#### 4. 研究成果

##### (1) 二重 Eisenstein 級数の漸近展開:

二重化された Barnes 型の Eisenstein 級数の Fourier 級数型変換・漸近公式とその応用として特殊値等の表示式に関する精密な成果を得た。現在, 格子点上の特殊値についての明示公式の導出が桂田昌紀氏と共同研究で進行中である。ここでは Ramanujan に始まる  $q$ -級数や楕円関数と関係することが判明しつつある。研究の出発点として古典的な Lipschitz の公式の二重化が必要であるが, その証明は最も広く用いられている調和解析を用いる代わりに, Mellin 逆変換型 (Barnes 型) の積分変換公式を援用するものである。

##### (2) 非正則版二重 Eisenstein 級数:

非正則版二重 Eisenstein 級数の Fourier 級数型変換公式等を与えた。この結果は実解析的一変数 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開の一般化である。変換公式は Barnes 型積分表示で与えられるので漸近展開が得られる。我々の手法により漸近展開における残余項の精密な評価を与えることが可能である。また、漸近展開の応用として、自明な零点、不確定特異点、格子点上における特殊値の明示公式を得ていることを報告する。

##### (3) 航空力学・風洞壁干渉計算への応用:

上記研究成果の発展・応用として, 航空力学における空力干渉計算に現れる二重級数の数値計算への応用を与えた。低速風洞干渉計算の理論構成には Prandtl によって構築された風洞壁干渉の算定方法が用いられる。これを矩形断面に適用して二重級数の急減少変換公式を導出した Glauert (1926 年頃) の結果, および Olver (1949 年) によって与えられた尾翼干渉に出現する二重級数の急減少変換公式を考察した。本報告者は Glauert および Olver の変換公式が正則, 非正則 Eisenstein 級数の Fourier 級数型展開式のそれぞれ類似であることを看取り, これら空力干渉計算に現れる二重級数を含む Eisenstein 級数を定義した。さらに多重ゼータ関数における視点に立ち, Fourier 級数型展開式(急減少変換式)を Mellin-Barns 型積分を経由して導出した。我々の結果は航空力学・風洞壁干渉計算(低音速)に現れる二重級数を上半平面上の Eisenstein 級数としてみなす新しい包括的な定義を与えるものであり, その Fourier 級数型変換公式が既知の結果を含む一般的な公式であることを初めて明らかにしたものである。

(4) **尖点形式に係るゼータ関数:** 尖点形式の多重化を視野に入れ, 本報告者は一変数尖点形式に直結する特殊関数を係数にもつゼータ関数を新たに定義した。特にベッセル関数や合流型超幾何関数を係数にもつ Dirichlet 級数を導入した。これらゼータ関数が積分表示を持ち, ある種の関数等式を満たすことを解明した。さらに Riemann ゼータ関数の母関数表示を持つなど極めて興味深い性質が明らかになりつつある。現在これらのゼータ関数と尖点形式と相互関係, 特殊関数に付随する隣接間関係式の意味づけなど基本的な諸性質の解明が進行中である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

T. Noda, A certain double series in aerodynamic interference calculations RIMS Kokyuroku, (Analytic Number Theory) 1874 (2014), 135-138. 査読無

T. Noda, A transformation formula for a certain Eisenstein series in aerodynamic interference calculations, Journal of Math-for-Industry, Vol. 5 (2013), B-6, pp. 135-138. 査読有

T. Noda, A transformation formula for Maass-type Eisenstein series of two variables, RIMS Kokyuroku (Analytic Number Theory) 1806 (2012), 210-218. 査読無

M. Katsurada and T. Noda, On generalized Lipschitz formulae and applications II, Proceedings of Diophantine Analysis and Related Fields 2011, AIP Conference Proceedings 1385, A.I.P. Press, (2011), 73-86. 査読無

[学会発表](計 10 件)

桂田昌紀, 野田 工, Transformation formulae and asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two variables, 日本数学会代数学分科会 学習院大学 2014 年 3 月 18 日

桂田昌紀, 野田 工, Transformation

formulae and asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two variables, 研究集会 Diophantine Analysis and Related Fields 筑波大学 2014年3月6日

野田 工, A transformation formula for a certain Eisenstein series in aerodynamic interference calculations AMS Fall Eastern Sectional Meeting, Temple University, Philadelphia, PA, USA, 2013年10月12日

野田 工, 大学初年次における数学基礎教育の実践例, 福島大学共生システム理工学類システム工学専攻研究交流会, 2013年3月2日

野田 工, A certain Eisenstein series in aerodynamic interference calculations, 名古屋大学多元数理科学研究科 解析数論セミナー, 2012年12月27日

野田 工, 空力干渉計算における2重級数の変換公式について, 日本大学工学部学術研究報告会, 2012年12月1日

野田 工, 桂田昌紀, Maass型2重Eisenstein級数の関数等式と特殊値について, 日本大学工学部学術研究報告会, 2012年12月1日

野田 工, A certain double series in aerodynamic interference calculations, 京都大学数理解析研究所 研究集会 解析的整数論とその周辺-近似と漸近的手法を通して見た数論, 2012年10月30日

野田 工, 桂田昌紀 2変数Maass型Eisenstein級数の変換公式, 日本大学工学部学術研究報告会, 2011年12月3日

野田 工, A transformation formula for Maass-type Eisenstein series of two variables, 京都大学数理解析研究所 研究集会 解析的整数論-数論的関数の多重性に関連して, 2011年11月2日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

野田 工 (NODA, Takumi)  
日本大学・工学部・准教授  
研究者番号: 10350034