

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540036

研究課題名(和文) 概均質ベクトル空間のゼータ関数と多重ゼータ値の研究

研究課題名(英文) Studies of zeta functions of prehomogeneous vector spaces and multiple zeta values

研究代表者

大野 泰生(OHNO, YASUO)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：70330230

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：主に多重ゼータ値と等号付き多重ゼータ値、多重ベルヌーイ数と多重オイラー数、2元3次形式の類数についての研究を行った。特に、超幾何関数を用いてある種の多重ゼータ値の列の母関数を書く公式を得た。多重ベルヌーイ数のp進的性質の解明のため多重ベルヌーイ数の満たす合同関係式の系列を構成し2重ベルヌーイ数の場合には2進的なクンマー型の合同式も得た。多重オイラー数については明示公式や合同関係式、逐次的アルゴリズム、および多重ベルヌーイ数との混合関係式などの多数の結果を得た。2元3次形式については合同部分群作用下での類数について算出を行い新たな類数表と付随する概均質ゼータ関数に関するある予測も得た。

研究成果の概要(英文)：We mainly studied multiple zeta and zeta-star values, poly-Bernoulli and poly-Euler numbers, and class numbers of binary cubic forms. In particular, we gave representations using special values of hypergeometric functions for generating functions of certain series of multiple zeta and zeta-star values. We also studied basic or p-adic properties of poly-Bernoulli and poly-Euler numbers and class numbers of integral binary cubic forms under the action of congruence subgroups of  $SL(2, Z)$ .

研究分野：数論

 キーワード：多重ゼータ値 多重ベルヌーイ数 2元3次形式 概均質ベクトル空間 多重ゼータ関数 多重オイラー数  
 数 ロンサム行列 簡約理論

## 1. 研究開始当初の背景

ゼータ関数の特殊値の多くは超越数であろうと古くから多くの数学者が考えているが、実際にその超越性が証明されていないケースもまだまだ多く、そのようなケースでは超越性を緩めた無理性についてすら情報はさして多くない。このような状況の中で、必要に迫られて多種多様なゼータ関数が登場し、それらの多変数化も着々と進んでいるが、それらの特殊値のある種の具体性をもった表記やその超越性について新たに判明することは少ない。こういった状況の中で、代表者は特殊値そのものの性質と併せて特殊値や関数の相互関係に注目してこれまで研究を展開してきた。とりわけ、ゼータ関数の多重化の特殊値であってオイラーに起源をもつ、多重ゼータ値のなす環の構造解明、あるいは概均質ベクトル空間の一般論に基づき最初に導入された、2元3次形式の空間に付随するゼータ関数の相互関係などに主軸を置いて、特殊値そのものの性質の解明と併せて研究を行ってきた。本研究はそれらのさらなる進展と深化を目指したものである。

## 2. 研究の目的

多重ゼータ値の関係式族は多種多様な理論と手法から導かれるものであるが、その中に母関数をガウスの超幾何関数で書ける族が存在し、Ohno-Zagierの研究により、それらは重さ・深さ・高さという多重ゼータ値の3つの重要インデックスと相性が良いことが知られている。母関数が超幾何関数で書かれる関係式族は複数存在し、各々が本質的に重要な関係式族を与えているので、超幾何関数で把握される多重ゼータ値和の系統的解明に取り組む。ガウスの超幾何関数による母関数の記述をもつと、これから得られる関係式族はリーマンゼータ値の張るベクトル空間に入ることが容易に掴めるなど、この課題にはとても意義がある。また上述の3つの重要インデックスに対して、一般化された高さインデックスは単純な定義の一般化ではあるものの、現段階で同等の重要性は掴みきれないものとなっており、これによる分類を加味した母関数は、ガウスの超幾何関数の枠を出て一般超幾何関数によって書かれる。そのため、リーマンゼータ値のなす環との関係は不明瞭になり、多くの場合にこの環には含まれないと考えられている。このため、一般化された高さインデックスに代わるよりよい第4のインデックスが、リーマンゼータ値のなす環に入る多重ゼータ値和の族を調べる上でひとつの有力な手がかりとなることは間違いなく、解明が望まれている。また、多重ゼータ値のq類似の研究では複数のq類似が定義できるが、それらの相互関係とともに、長所短所の解明についても研究を行った。多重ゼータ値の和を正整数点での値にもつようなリーマンゼータ関数の一般化として荒川-金子のゼータ関数が知られており、その

負整数点での特殊値は、多重ベルヌーイ数と呼ばれる、多重対数関数を用いて定義される有理数で系統的に書かれる。多重ベルヌーイ数と(有限)多重ゼータ値の間に深淵な関係が見え始めている背景も見据えて、多重ベルヌーイ数を構成する素因数とりわけ分母のオーダー評価に取り組み、クマー型合同式の多重ベルヌーイ数版の究明に向けて取り組んだ。これは、岩澤理論の観点からは多重ベルヌーイ数に関連するp進L関数の定義への模索ともなっている。また、負インデックスをもつ多重ベルヌーイ数について組合せ論的手法に基づき、物理的な対象であるロンサム行列の個数との関係の深化に取り組んだ。さらに、ベルヌーイ数と密接な関係にあるオイラー数の多重化である多重オイラー数について、構成する素因数の情報を抽出するとともに、それらの満たす合同関係式の解明、および多重ベルヌーイ数との関係の解明に取り組んだ。また、2元3次形式の類数については、この空間に付随する10通りの格子と20個のディリクレ級数について、それらの満たす代数的関数等式とそれによって前面に押し出されてくる判別式の異なる類の間の螺旋的な相互関係に注目して、それらの解明とそれを用いた代数的関数等式の再証明に向けた情報収集に取り組んだ。

## 3. 研究の方法

双対関係式あるいは反復積分表示の観点から対称性の高いインデックスをもつ多重ゼータ値に限定した和の系列に絞り、母関数を定義してその満たす微分方程式の構成に取り組んだ。母関数・微分方程式・超幾何関数というひとつの流れに乗るため、数値実験を多く行って、ある種の多重ゼータ値の系列の重さに対応した数値的な挙動の解明に取り組んだ。多重ベルヌーイ数と多重オイラー数の性質解明には荒川-金子ゼータ関数を用いるとともに数値計算による数列の系統的で具体的な性質予測および組合せ論的手法を用いた研究を行った。また2元3次形式の20個のディリクレ級数の係数についても多数の数値実験を行い、更にある合同部分群作用下での2元3次形式の類別と挙動を見ることでより詳細なこれらの構造把握に取り組んだ。

## 4. 研究成果

単独の多重ゼータ値のなすある系列について、重さを次数とする母関数を構成し、それがガウスの超幾何関数の積になっていることを解明した。取り扱った一部の系列では、すでに一般超幾何関数を用いた表記が知られていたが、今回はガウスの超幾何関数で記述することにより、リーマンゼータ値のなす環との関係が把握できるようになった。この研究の副産物として、一般超幾何関数の特殊値とガウスの超幾何関数の特殊値の間の離散的で系統的な関係式が構成された。このよ

うな離散的な関係式はこれまでの研究にも時おり現れており、系統的把握が今後の課題のひとつである。また、上述の研究成果と関連して、第4のインデックスの候補が得られた。この新たなインデックスの性質については、十分な時間がなく詳細説明は今後の継続課題となったが duality 不変であることや微分関係式と相性が良いことなど利点が多く期待が高まる。多重ゼータ値の  $q$  類似については、奥田、Zudilin との継続的研究により、従前の一般的な  $q$  類似とは異なる定義を導入し、その長所と短所を解明するとともに、これまで一般化の難しかった、通常の高重ゼータ値では本質的で重要とされる関係式族の  $q$  類似を与えることに成功した。従前の  $q$  類似との関係解明も与えたので今後は、例えば級数表示系の関係式であるのか、積分表示系の関係式であるのか、あるいは両系統の関係式であるのか、などの状況に応じて  $q$  類似を使い分けあるいは乗り換えることが肝要と判明した。多重ゼータ関数の特殊値の記述で有効性を認められている多重ベルヌーイ数については、まず、鎌野、山本とロンサム行列との関係の深化に取り組み、重み付きロンサム行列の母関数の記述に成功した。また、坂田とは、多重ベルヌーイ数の  $p$ -order の解明に取り組み、 $p=2,3$  の場合の2重あるいは3重のベルヌーイ数の order の解明と、 $p=2$  で2重の場合のクンマー型合同式の構成を行った。ベルヌーイ数と密接に関係するオイラー数の多重化の研究では、多重ベルヌーイ数と類似の手法で定義した多重オイラー数について、明示公式や逐次関係式、計算機に負担の少ない初等的発生方法などを解明し、正負の符合交換の法則が、多重オイラー数の満たす合同関係式を系統的かつ集中的に解明した。合同部分群作用下での  $Z$  格子点に付随する2元3次形式の類別とゼータ関数の挙動について数多くの数値実験を行い大野、中川によって知られた2元3次形式の非自明な類数関係式の別証明の解明にむけたデータの蓄積を行うとともに、2元3次形式の空間の残る4つの  $Z$  格子に付随するゼータ関数の、他の格子に付随するゼータ関数を用いた書き下し公式と、自己双対的関数等式については、谷口との共著論文を Math. Res. Lett. 誌に掲載した。以上に述べた研究成果の多くは、ケンブリッジのニュートン研究所や台湾の国家理論科学センター等の招待講演をはじめとする多数の口頭発表と論文において公開した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 8 件)

- (1) Yasuo Ohno, Takashi Taniguchi, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of

binary cubic forms II, Math. Res. Lett. 21 (2014), 363-378, 査読有, DOI: 10.4310/MRL.2014.v21.n2.a12.

- (2) Ken Kamano, Yasuo Ohno, Shuji Yamamoto, Weighted lonesum matrices and related generating function, Integers 13 (2013), A25, 1-7, 査読有, <http://www.westga.edu/~integers/vol13.html>.
- (3) Yasuo Ohno, Yoshitaka Sasaki, Periodicity on poly-Euler numbers and Vandiver type congruence for Euler numbers, RIMS Kokyuroku Bessatsu B44 (2013), 205-211, 査読有.
- (4) Yasuo Ohno, Jun-ichi Okuda, Wadim Zudilin, Cyclic  $q$ -MZSV sum, Journal of Number Theory 132 (2012), 144-155, 査読有, doi:10.1016/j.jnt.2011.08.001.
- (5) Yasuo Ohno, Yoshitaka Sasaki, On the parity of poly-Euler numbers, RIMS Kokyuroku Bessatsu B32 (2012), 271-278, 査読有.

〔学会発表〕(計 27 件)

- (1) 大野泰生, 等号付き多重ゼータ値の系譜, 第23回関西多重ゼータ研究会, 2014年12月6日, 大阪工業大学(大阪府大阪市旭区).
- (2) 大野泰生, 多重ゼータ値の関係式と母関数, 代数学セミナー, 2014年11月13日, 岡山大学(岡山県岡山市).
- (3) 大野泰生, 多重ゼータ値の線形関係式について, 数学談話会, 2014年10月28日, 小山工業高等専門学校(栃木県小山市).
- (4) 大野泰生, Euler の多重ゼータ値と母関数, 数理物理学セミナー, 2014年10月1日, 立教大学(東京都豊島区).
- (5) Yasuo Ohno, Sums of multiple zeta values and their generating functions, The 2<sup>nd</sup> Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory, 2014年9月1日, 国民休暇村気仙沼大島(宮城県気仙沼市).
- (6) Yasuo Ohno, Multiple zeta values and hypergeometric functions, 2014年8月22日, Workshop on Multiple Zeta Values, 九州大学(福岡県福岡市西区).
- (7) 大野泰生, 多重ゼータ値と母関数, 裏磐梯数学セミナー, 2014年7月30~31日, 裏磐梯高原ホテル(福島県北塩原村).
- (8) 大野泰生, 等号付き多重ゼータ値について, 整数論セミナー, 2014年6月9日, 東北大学(宮城県仙台市青葉区).
- (9) 大野泰生, 多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数, One-day workshop around algebraic combinatorics, 2014年6月7日, 高知大学(高知県高知市).
- (10) 大野泰生, 多重ゼータ値の和公式と双対公式について, 数学教室談話会, 2014年

- 4月21日,東北大学(宮城県仙台市青葉区).
- (11)佐々木義卓,大野泰生,多重 Euler 数の諸性質について,第10回「代数学と計算」研究集会(AC2013),2013年12月18日,首都大学東京(東京都八王子市).
- (12)大野泰生,多重ゼータ値の和の母関数について,整数論&保型形式セミナー,2013年11月29日,大阪大学(大阪府豊中市).
- (13)小畑久美,大野泰生,自己同型グラフと巡回自己同型グラフについて,トポロジー&幾何学セミナー,2013年11月26日,広島大学(広島県東広島市).
- (14)大野泰生,多重ベルヌーイ数の性質について,代数セミナー,2013年11月18日,愛媛大学(愛媛県松山市).
- (15)大野泰生,多重ゼータ値の関係式入門,RIMS 研究集会「多重ゼータ値の諸相」,2013年7月23日,京都大学数理解析研究所(京都府京都市左京区).
- (16)Yasuo Ohno, On multiple zeta-star values, Workshop on Grothendieck-Teichmüller Theory and Multiple Zeta Values, 2013年4月9日,ケンブリッジ大学ニュートン研究所(ケンブリッジ(イギリス)).
- (17)坂田実加,大野泰生,2重ベルヌーイ数の2-orderと3-orderについて,日本数学会・年会・代数学分科会,2013年3月23日,京都大学(京都府京都市左京区).
- (18)大野泰生, On a property of di-Bernoulli numbers, 第17回早稲田大学整数論研究集会,2013年3月17日,早稲田大学(東京都新宿区).
- (19)小畑久美,大野泰生, On enumeration of edge colored graphs, Friday seminar on knot theory, 2013年2月1日,大阪市立大学(大阪府大阪市住吉区).
- (20)Yasuo Ohno, On relations among multiple zeta values, 2012 NCTS Taiwan-Japan Joint Conference on Number Theory, 2012年8月28日, National Center for Theoretical Science (新竹(台湾)).
- (21)大野泰生, On the enumeration of certain edge-colored graphs, RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、組合せ論の研究」,2012年3月7日,京都大学数理解析研究所(京都府京都市左京区).
- (22)大野泰生,2元3次形式の簡約理論と類対応の観察,北陸数論研究集会,2011年12月25日,金沢大学(石川県金沢市).
- (23)大野泰生, A view of Hoffman's basis conjecture and two-one formula for multiple zeta values, RIMS 研究集会「解析数論シンポジウム」,2012年10月31日,京都大学数理解析研究所(京都府京都市左京区).
- (24)大野泰生,谷口隆, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms II, 日本数学会・秋季総合分科会・代数学分科会,2011年10月1日,信州大学(長野県松本市).
- (25)大野泰生,佐々木義卓,多重 Euler 数の数論的性質,日本数学会・秋季総合分科会・代数学分科会,2011年10月1日,信州大学(長野県松本市).
- (26)大野泰生,鎌野健,山本修司,重みつきロンサム行列について,日本数学会・秋季総合分科会・代数学分科会,2011年10月1日,信州大学(長野県松本市).
- (27)小畑久美,大野泰生,辺着色 hypergraph における巡回自己同型について,日本数学会・秋季総合分科会・応用数学分科会,2011年9月28日,信州大学(長野県松本市).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

大野 泰生 (OHNO, Yasuo)  
 東北大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号: 70330230