

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 22 日現在

機関番号：12401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540041

研究課題名(和文) 平面代数曲線の高次ワイエルシュトラス点とモジュライ空間の幾何

研究課題名(英文) The geometry of higher Weierstrass points and moduli spaces of plane algebraic curves

研究代表者

酒井 文雄 (SAKAI, Fumio)

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：40036596

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：種数2の曲線で余分な対合を持つ平面曲線の3次ワイエルシュトラス点の分布に関する研究を行った。特異平面曲線のゴナリティに関する新しい判定法を証明した。特に、特異点の最大重複度が3のときには最良と思われる判定法を得た。新しく、特異点の重複度により定義される不変量 V を導入した。また、ゴナリティの下からの評価式も考察した。射影直線の巡回被覆曲線の中で超楕円曲線になるものを分類した。これらの成果を論文にして発表した。

研究成果の概要(英文)：We studied 3-Weierstrass points on genus two curves with extra involutions. We obtained new criterion for the gonality of singular plane curves. In particular, in case the maximal multiplicity of the singular points is equal to three, we obtained the almost optimal criterion. We introduced a new invariant V defined by the multiplicities of singular points. We also considered the lower bound of the gonality. We classified hyperelliptic curves among cyclic coverings of the projective line. We published papers on these topics.

研究分野：数物系科学 B

キーワード：代数幾何 平面代数曲線 特異点 ワイエルシュトラス点 ゴナリティ

1. 研究開始当初の背景

(1) 代数曲線は代数幾何学の源であり，古典的な研究テーマであるが，現代においても大変魅力的な研究分野である．特に，平面代数曲線の研究が重要である．どのような代数曲線も特異点を持った平面曲線として実現されること，具体的に一つの定義方程式で表現することが可能なこと等のためである．平面曲線について，以下のような研究を行ってきた．

(2) 1980年代の中頃から，平面代数曲線の研究を開始した．有理尖点曲線について，曲線の次数は特異点の最大重複度の3倍未満でなければならないという予想を肯定的に解決した．

(3) 特異点を持つ平面曲線における不変量ゴナリティが次数と特異点の最大重複度との差に一致するための判定法をいくつか証明した．

(4) $(d, d-2)$ 型平面曲線の特異点を分類し，定義方程式を記述する方法を示した．

(5) 種数3のピカル曲線のワイエルシュトラス点の分布，栗林4次曲線の2次ワイエルシュトラス点の分布などを研究した．

2. 研究の目的

(1) 平面曲線について，高次ワイエルシュトラス点の位置と重みを計算し，対応する射影幾何学的性質を探究する．特に，射影直線の p 次巡回被覆曲線(p は素数)における高次ワイエルシュトラス点を考察する．

(2) 平面曲線の族のモジュライ空間を記述し，平面曲線の性質との関連を明らかにする．特に，射影直線の p 次巡回被覆曲線の族を念頭に置いている．このような場合のモジュライ空間はパラメータ空間を有限群で割った商空間として記述できる．曲線族によって，いろいろな

場合があり，個別の研究が必要である．簡単な場合から順次，モジュライ空間を具体的に記述したい．考察する平面曲線の性質としては，自己同型群，ゴナリティ，高次ワイエルシュトラス点等などがある．

3. 研究の方法

(1) パラメータを含む平面曲線族を考え，その中で，特別な高次ワイエルシュトラス点を持つパラメータを数式処理を用いて組織的に計算する．方法としては，ロンスキアン形式を用いる手法が基本である．低種数で，パラメータ数が少ない場合から順次計算を進める．幾何学的には，他の曲線との接触位数を考察する．

(2) 平面曲線の族のモジュライ空間の記述に欠かせないゴナリティの研究を進める．これまでの研究により，ゴナリティを決定するいくつかの判定法を得ているが，改良の余地がある．また，特異点の最大重複度を固定して，ゴナリティと種数の関係を調べる．特に，射影直線の巡回被覆曲線のゴナリティを自己同型などを用いて考察する．

4. 研究成果

(1) 種数2の平面曲線で超楕円対合以外に余分な対合を持つ曲線族 $y^2 = x^6 + ax^4 + bx^2 + 1$ の3次ワイエルシュトラス点の分類と幾何学的な研究を行った(博士課程の院生であった Farahat 氏との共同研究)．重み2と重み1の3次ワイエルシュトラス点の分布を調べ，特別な分布に対応しているパラメータ空間における曲線を求めた．ロンスキアン形式の零点の位数を部分終結式と幾何学的考察により計算した．

(2) d 次平面曲線 C のゴナリティを G とし，特異点の最大重複度を ν とすると， $G \leq d - \nu$ である．2004年の論文(大河内正仁氏と共著)

において、等号 $G = d - \nu$ が成立するための十分条件を2種類証明した。

今回、上記の結果をいくつかの点において改良した。新しい観点は、特異点の重複度により定義される新しい不変量 V を導入したこと、 G の下からの評価式 $G \geq d - \nu - q$ を考察したことである。

定理 1. 平面曲線 C のデルタ不変量 δ が、

$$(A) \quad \delta \leq [d/2](d - [d/2]) - (d - \nu - q)$$

$$(B) \quad \delta \leq k_0(d - k_0) - (d - \nu - q) + V$$

を満たせば、 $G \geq d - \nu - q$ が成立する。ここで、 $k_0 \geq \max\{[d/\nu], 2\}$ 。実は、 $\nu = 2$ の場合には条件 A と条件 B は一致する。また、 $\nu = 3$ の場合には、個別に精密な議論をすることで、最良と思われる次の結果を得た。

定理 2. $\nu = 2$ または $\nu = 3$ とする。 δ が、

$$\delta \leq [d/2](d - [d/2]) - (d - \nu - q)$$

を満たせば、 $G \geq d - \nu - q$ が成立する。

系. $\nu = 3$ のとき、 $g \geq (d^2 - 2d - 7)/4$ (d は奇数)、 $g \geq (d^2 - 2d - 8)/4$ (d は偶数) であれば、等号 $G = d - 3$ が成立する。ここで、 g は C の種数である。

もう一つの判定法である定理 3 (省略) を併せて、種々の平面曲線のゴナリティを決定することが可能になった。

(3) 射影直線の巡回被覆曲線で超楕円曲線 (ゴナリティが2の曲線) であるものの分類を完成した (王楠氏, 川崎真澄氏との共同研究)。超楕円曲線であることが容易に分かる場合を除くと、次の2種類と双有理になるというのが分類結果である。

$$(i) \quad y^d = (x - a_1)(x - a_2),$$

$$(ii) \quad y^d = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)^{d-1}$$

5. 主な発表論文等

(雑誌論文) (計 6 件)

- ① Nan Wangyu and Fumio Sakai, Hyperelliptic curves among cyclic coverings of the projective line II, Arch. Math. **102**, (査読有), 2014, 113-116,
- ② Fumio Sakai, The gonality of singular plane curves revisited II, Proc. 11th Symposium on Algebraic Curves, Metrop. Univ. Tokyo., (査読無), 2014, 129-141,
- ③ Nan Wangyu, Masumi Kawasaki and Fumio Sakai, Hyperelliptic curves among cyclic coverings of the projective line I, Arch. Math. **101**, (査読有), 2013, 479-484,
- ④ Fumio Sakai, The gonality of singular plane curves II, Proceedings of Affine algebraic Geometry, Osaka 2011, World Scientific Publ. Co., Singapore, (査読有), 2013, 243-266
- ⑤ Fumio Sakai, The gonality of singular plane curves revisited, Proc. 10th Symposium on Algebraic Curves, Nihon Univ., (査読無), 2013, 71-79
- ⑥ Mohamed Farahat and Fumio Sakai, The 3-Weierstrass points on genus two curves with extra involutions, Saitama Math.J., (査読有), **28**, 2011, 1-12

(学会発表) (計 6 件)

- ① 酒井文雄, Towards computing the gonality of singular plane curves, 第13回アフィン代数幾何研究集会, 2015年3月6日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス (大阪府, 大阪市)

- ② 酒井文雄, Towards the gonality of singular plane curves, Symposium on Projective Algebraic Varieties and Moduli 2014, 2014年2月11日, ソウル大学, ソウル (韓国)
- ③ 酒井文雄, The gonality of singular plane curves revisited II, 第11回代数曲線シンポジウム, 2013年12月23日, 首都大学東京 (東京都, 八王子市)
- ④ 酒井文雄, The gonality of singular plane curves revisited, 第10回代数曲線シンポジウム, 2012年12月16日, 日本大学 (東京都, 千代田区)
- ⑤ 酒井文雄, 特異平面曲線のゴナリティ再訪, 津山代数幾何シンポジウム 2012, 2012年7月30日, 津山高専 (岡山県, 津山市)
- ⑥ 酒井文雄, 平面曲線族における高次ワイエルシュトラス点の計算, 津山代数幾何シンポジウム, 2011年7月27日, 津山高専 (岡山県, 津山市)

(図書) (計 2件)

- ① 酒井文雄, 共立出版, 平面代数曲線, 2012, 204
- ② 酒井文雄, 共立出版, 大学数学の基礎, 2011, 137

(その他)

ホームページ

<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/FumioSakai.html>

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
酒井 文雄 (SAKAI, Fumio)
埼玉大学・大学院理工学研究科・名誉教授
研究者番号: 40036596
- (2) 研究協力者
川崎 真澄 (KAWASAKI, Masumi)
海城高等学校・教諭

- 王 楠 (WANGYU, Nan)
瀋陽師範大学・講師

- Mohamed Farahat
Al-Azhar University・講師