

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 14 日現在

機関番号：13501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540044

研究課題名(和文)表現のモジュライとその周辺(2)

研究課題名(英文)Moduli of representations and related topics (2)

研究代表者

中本 和典(NAKAMOTO, Kazunori)

山梨大学・総合研究部・教授

研究者番号：30342570

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：Borel鑄型の表現のモジュライの構成について、学術論文として公表した。各鑄型に対する2次表現のモジュライの構成と、自由モノイドに関する2次表現の各鑄型に対する位相幾何的性質についての結果(鳥居猛氏(岡山大学)との共著)をプレプリントとして公表した。面田康裕氏(明石高専)との共同研究として、複素単純Lie群の有限次元既約表現に関して、thick表現とdense表現の分類が完成した。また、Loewy列に関する表現のモジュライの分割がpolynomial countと関連があること、代数的閉体上、各々の分割が表現多様体において局所閉であることが鳥居猛氏との共同研究により判明した。

研究成果の概要(英文)：The paper on the construction of the moduli of representations with Borel mold has been published. As preprints, we announced the results on the construction of the moduli of representations of degree 2 for each mold and on topological properties of them for free monoids (joint work with Takeshi Torii(Okayama University)). We completed the classification on thick representations and dense representations of complex simple Lie groups (joint work with Yasuhiro Omoda (Akashi National College of Technology)). As a joint work with Takeshi Torii, we also see that the stratification of the moduli of representations with respect to Loewy series is much related with whether the moduli is polynomial count, and that each stratification is locally closed in the representation variety over any algebraically closed field.

研究分野：数学・代数学

キーワード：代数学 代数幾何学 不変式論 表現のモジュライ

1. 研究開始当初の背景

本研究は、本研究者が若手研究(B)「表現のモジュライとその周辺」(2007年度～2010年度、研究課題番号:19740007)において行った研究の続きにあたる。

表現のモジュライは、数学の各分野にわたる基本的かつ重要な数学的对象である。表現そのものを知りたいだけでなく、いろいろな数学的对象のモジュライ(たとえばベクトル束のモジュライ)を構成する際にも、表現のモジュライを応用することができる。

群やモノイドの表現のモジュライを通常の方法で構成しようとする、絶対既約表現でない場合には、組成因子が等しい2つの表現が商空間の中で同じ点としてくっついてしまうために、表現の同値類とモジュライの点が1対1に対応しないこととなる。その欠点を解消するために、本研究者が「鑄型」という概念を登場させた。鑄型の等しい表現だけを集めてくると、うまく表現のモジュライを構成できることを、Borel 鑄型の場合に示した。ここでいう、鑄型とは行列の部分代数のことである。表現の行列環への像が生成する部分代数(鑄型)が同じものを集めようというアイデアである。

本研究者と鳥居猛氏(岡山大学)により、自由モノイドについて、複素数体上の Borel 鑄型表現のモジュライに関する位相的な性質、有理ホモトピー型の記述、Sullivan の極小モデル上の混合ホッジ構造の記述、表現の次数が小さい場合の整係数コホモロジー群の決定、などが結果として得られていた。

研究開始当初時も、そして現在においても、いろいろな鑄型に対する表現のモジュライを構成し、それらの代数幾何学的な性質や代数的位相幾何学的な性質を調べることは大変有意義であると思われる。

2. 研究の目的

各鑄型をもつ表現のモジュライを構成し、その構造を不変式論からのアプローチと代数的位相幾何からのアプローチで解明する。主に次の問題に取り組む。

- (1) 各鑄型に対する表現のモジュライを代数幾何的に構成せよ。
- (2) 自由モノイドに関して、各鑄型に対する2次表現のモジュライの位相的性質を調べよ。特に、2次絶対既約表現のモジュライに関する位相的構造について調べよ。
- (3) 既約表現の中で、thick, dense といった特別な表現のクラスについて調べ、未解決問題に取り組む。
- (4) 行列の不変式環の構造について、PC を使い、退化したポアンカレ級数の決

定を目標とする。

3. 研究の方法

当初の研究の方法は次の通りである。なお、実際には一部優先順位をかえて、研究を行った。

- (1) 各鑄型に対する表現のモジュライの構成について、順次論文を執筆していく。
- (2) 自由モノイドに関して、各鑄型の2次表現のモジュライの位相的構造について、鳥居猛氏(岡山大学)と共同で研究を進める。
- (3) 面田康裕氏(明石高専)と共同で、thick や dense といった表現に関する未解決問題に取り組んでいく。結果を順次論文にまとめていく。
- (4) 奥山真吾氏(香川高専)と共同でPC を使い、行列の不変式環について、退化したポアンカレ級数を求めていく。

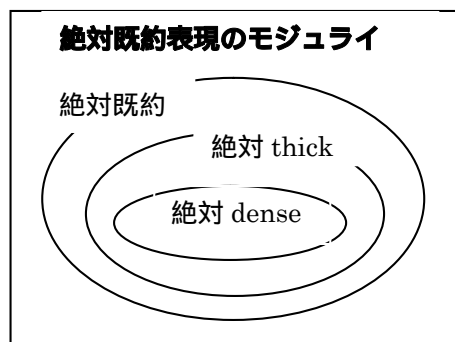
4. 研究成果

- (1) 各鑄型に対する表現のモジュライの構成について、Borel 鑄型の表現のモジュライの構成に関しては、単著 "The moduli of representations with Borel mold" が学術雑誌 "International Journal of mathematics" に掲載された。また、2次表現の各鑄型に対する表現のモジュライの構成については、プレプリント "The moduli of representations of degree 2" (arXiv:1405.2788) として、公表した。現在学術雑誌に投稿中である。2次表現は6種類に分類され、それぞれの場合に関して表現のモジュライを構成した。6種類とは、絶対既約表現、Borel 鑄型表現、半単純鑄型表現、冪単鑄型表現、 F_2 上の冪単鑄型表現、スカラー鑄型表現のことである。2次表現のモジュライについては、Kyung Hee 大学(韓国)において、第6回日中韓環論国際シンポジウムで講演を行った。
- (2) 自由モノイドに関して、各鑄型に対する2次表現のモジュライの位相的性質について、鳥居猛氏と共著のプレプリント "Virtual Hodge polynomials of the moduli spaces of representations of degree 2 for free monoids" (arXiv:1501.02933) を公表した。Reineke や Lawton がすでに得ていた結果と重複するところもあるが、表現多様体を鑄型に関して分割し、それぞれの部分スキームを表現に関する関手として記述し、その位相的性質の詳細

について調べた点が独創的である。自由モノイドの2次絶対既約表現の表現多様体および指標多様体に関して、Hasse-Weil 関数を求め、関数等式を満たすことを確認した。また、その内容については、代数幾何学城崎シンポジウムにおいて、講演

”Virtual Hodge polynomials of the moduli spaces of representations for free monoids”を行った。

- (3) 面田康裕氏との共同研究として、thick 表現に関する結果を論文 ”Special classes of irreducible representations I” (仮題) にまとめつつあり、近々公表予定である。ここで thick な表現 $:G$ $GL(V)$ とは、 V の部分空間 V_1, V_2 で、 $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$ となるものに対し、ある G の元 g が存在して、 $(g)V_1 + V_2 = V$ となるときをいう。dense な表現とは、外積表現がすべて既約である表現のことをいう。さらに、新しい概念として、realizable subspace、 r -number などを登場させた。小さい次元に対する r -number を具体的に計算した。絶対 thick 表現が表現多様体の中で開集合をなし、そのことを利用すると、絶対 thick 表現の同値類のモジュライを有理整数環上構成できることを示した。絶対 dense 表現の同値類のモジュライも、絶対 thick 表現の同値類のモジュライの開集合として、有理整数環上構成できる。また、その内容については、ビーレフェルト大学(ドイツ)において、ICAR2012 で講演 “The moduli of absolutely thick representations” を行った。

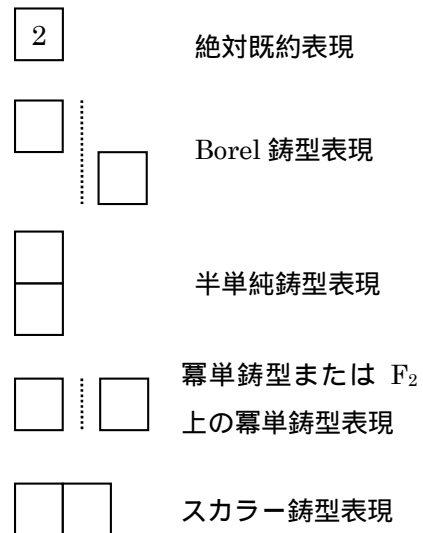


面田康裕氏の結果により、complex simple Lie group の有限次元複素既約表現について、thick 表現および dense 表現についての分類が完成した。それにより、weight multiplicity free な表現と thick 表現が結び付けられた。さらに、既約表現の非自明な外積表現が thick でないという結果も得られた。このことから、既存の既約表現から外積をとることによって、新しく thick 表

現を作ることができないことがわかった。非自明な外積をとることにより、絶対 dense 表現のモジュライから、絶対 thick でない絶対既約表現のモジュライへの射が得られる。これらの結果についても、”The classification of thick representations of simple Lie groups” (仮題) として公表予定である。

- (4) 行列の不変式環の退化したポアンカレ級数について、7次の2個の行列の場合を計算した。まだまとまった結果は得られていないが、順次PCを利用して、下の方からの計算を継続している。
- (5) 鳥居猛氏との共同研究として、Loewy 列に関する表現のモジュライの分割が、polynomial count と密接に関連することを見出した。また、代数的閉体上、Loewy 列による表現のモジュライの分割が、表現多様体において局所閉であることを確認した。ここで、Loewy 列とは、表現に対応する加群の socle をとり、加群全体を socle で割った剰余加群の socle をとり、さらに剰余加群の socle をとり、・・・というふうにして得られる部分加群の列のことである。Loewy 列の type が同じ表現を集めて分類すれば、鑄型による分類より荒いが、局所閉といった性質を取り出せることを発見した。これらの結果について順次論文としてまとめ、公表していく予定である。

**Loewy 列による2次表現の分類
(2次の場合には鑄型による分類と本質的に一致する。)**



5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計3件)

“The moduli of representations with Borel mold”, Kazunori Nakamoto, International Journal of Mathematics 25 (2014) 1450067 (31pages). DOI:10.1142/S0129167X14500670 査読有

“A new construction of $\mathbb{Y}\tilde{\text{D}}_5$ -singularities and generalization of Slodowy slices” Kazunori Nakamoto and Meral Tosun, Journal of Algebra 376 (2013) 139-151. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2012.11.016 査読有

“Topology of the representation varieties with Borel mold for unstable cases” Kazunori Nakamoto and Takeshi Torii, Journal of the Australian Mathematical Society 91 (2011) 55-87. DOI:http://dx.doi.org/10.1017/S1446788711001418 査読有

〔学会発表〕(計3件)

中本和典, “Virtual Hodge polynomials of the moduli spaces of representations for free monoids”, 代数幾何学城崎シンポジウム, 2013年10月25日, 城崎大会議館(兵庫県豊岡市城崎町)

Kazunori Nakamoto, “The moduli of absolutely thick representations”, Workshop and International Conference on Representations of Algebra (ICRA2012), 2012年8月17日, ビーレフェルト大学、ビーレフェルト(ドイツ)

Kazunori Nakamoto, “Topics on the moduli of representations of degree 2”, 第6回日中韓環論国際シンポジウム, 2011年6月29日, Kyung Hee 大学、スウォン(韓国)

〔その他〕
ホームページ等

山梨大学 研究者総覧 研究者公開情報
http://erdb.yamanashi.ac.jp/rdb/A_DispInfo.Scholar?ID=D064338FEDDFC538

山梨大学医学部医学教育センター(数学)
<http://www.med.yamanashi.ac.jp/medicine/mathematics/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

中本 和典 (NAKAMOTO, Kazunori)
山梨大学・総合研究部・教授
研究者番号: 30342570

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし