

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 26 日現在

機関番号：14601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540048

研究課題名(和文) 広領域コホモロジー理論から展望する局所コホモロジー加群の性質に関する研究

研究課題名(英文) Study on the properties on local cohomology modules from view points of wide cohomology theories

研究代表者

川崎 謙一郎 (Ken-ichiroh, Kawasaki)

奈良教育大学・教育学部・教授

研究者番号：60288040

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：1960年代に、余有限複体または加群に関する4つの問題が提起された。特に第二問題を紹介すると次のようになる。問題「 J -余有限加群の圏 $M(R, J)\text{cof}$ はアーベル圏であるか？」ただし、 R は可換ネーター環であり、 J はそのイデアルである。本科学研究費助成期間において、上記の問題に関し、イデアル J が可換ネーター環の単項イデアルであるとき、 $M(R, J)\text{cof}$ がアーベル圏である事を証明することができた。さらに J -進位相で完備である正則環上 J -余有限複体の特徴付けに関する1つの主張(6つの必要十分条件)およびその正確な証明について与えることができた。

研究成果の概要(英文)：In the period with the grant, we proved that the category $M(R, J)\text{cof}$ of J -cofinite modules is a full sub-category abelian category of the category of all R -modules, provided the ideal J is principal up to radical, where J is an ideal of a noetherian ring R . Further we could give a characterization over regular rings complete with respect to a J -adic topology, after Hartshorne, on the question: when is the complex bounded below J -cofinite?

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：環論

キーワード：局所コホモロジー 余有限加群 双対性 自己準同型環 代数学 数学教育 グラフ理論 モノミアル

1. 研究開始当初の背景

研究当初の大まかな研究目的/背景は、主に以下の点にあった。

目的 1. 環 R が正則局所環である場合について、局所コホモロジー加群の有限性に関する性質を明らかにすること。その際、他の領域のコホモロジー理論を対比させることを念頭に置きながら考察をする。

以下の 2 つ、上記に関連した問題を与えられていた。

問題 1. R をネーター局所環で I を R のイデアルとする。もし R が正則ならば、加群 R のイデアル I に関する j 番目の局所コホモロジー加群 $H_I^j(R)$ の付随準素イデアルの集合は、すべての j に対して有限であるか？

問題 2. R をネーター局所環で I を R のイデアルとする。もし R が正則ならば、 $H_I^j(R)$ の Bass 数はすべての j に対して有限であるか？

国内・国外の動向を述べると、目的 1 に関して次の結果が知られている：

定理 (Huneke-Sharp, Lyubeznik). R が体を含む正則局所環で I を R のイデアルとし、 m を極大イデアルとする。このとき、すべての i, j に対して、次が成り立つ。

(1) $H_{m^j}^i(H_I^i(R))$ は移入的である。

(2) $H_I^i(R)$ の移入的次元は $H_I^i(R)$ の台の次元を越えない。

(3) $H_I^i(R)$ の付随素イデアルの集合は有限である。

(4) $H_I^i(R)$ のすべての Bass 数は有限である。

1993 年に提出された上記の結果は、長年、局所コホモロジー加群の進展がなかったところに新しい進展の機会を全世界の関連研究者に提供した成果である。本申請研究は、上記の結果の発展型として位置付けとしていた。

平成 19 年 11 月に、第 29 回可換環論シンポジウム (平成 19 年 11 月 19 日 (月)、名古屋) にて成果を発表した。1 次元のイデアルではあるが、一般の局所環上で一定の成果を得た。平成 22 年 12 月に神奈川でのシンポジウムおよび、平成 22 年 12 月にフランスのマルセイユにおいて行われた国際研究集会にて成果発表を行った。その当初の成果を踏まえいくつか問題を提起でき、本科学研究費申請研究当初の着想にいたっている。

目的 1 に関して、Lyubeznik は、局所コホモロジー加群に代数的 D -加群の理論を応用したときに、1 つの新しい不変量を提唱した。こゝに $Lyubeznik$ number と呼ばれている。

問題 3. 一番高い Lyubeznik number の特徴付ける性質を与えなさい。

基礎環が Serre の条件 S_2 を満たすならば一番高い Lyubeznik number は 1 であることは、申請者が過去に肯定的に解決し

ている。基礎環が余次元 1 で連結である場合はしばらく未解決のままであったが、正標数の場合 Lyubeznik 自身が、そして、任意の標数では Zhang が一番高い Lyubeznik number は 1 である必要十分条件を決定している。Lyubeznik number と $Spec R$ との位相的な関係が与えられた。このような Lyubeznik number の位相的な特徴付けや、それらの応用についても発展させたいと考えていた。

以上のことが研究開始当初の背景、本研究の大まかな目的である。さらに、数学の研究の教育への応用についての活動を含めて行なう予定としていた。

2. 研究の目的

本科学研究費のより具体的な目的として次を掲げている：広い領域で進展してきたコホモロジー理論を観察しながら、局所コホモロジー加群に関してその性質を明らかにする。特に、環 R が不分岐正則局所環である場合について、局所コホモロジー加群の性質の今まで進展してきた内容のその精密化やその特徴付けをはかる。

Lyubeznik が体を含まない状態で解決した定理の主張は、正確には、次の通りである：

命題. 局所コホモロジー加群 $H_I^i(R)$ の移入的次元は $H_I^i(R)$ の台の次元 +1 を越えない。

局所コホモロジー加群の移入的次元の精密化はこれからの課題であり、局所コホモロジー加群 $H_I^i(R)$ の移入的次元は $H_I^i(R)$ の台の次元を越えないかどうかという問題は、研究活動当初の時点では知られていなかった。Huneke-Sharp, Lyubeznik の定理の主張と同様の結果について、不分岐正則局所環上にてアプローチして行くことを最大の目的としていた。また、 l -余有限の加群の圏がいつアーベル圏になるかという問題があり、当初、幾ばくかの進展があった。その継続的な研究も含めて行なう予定であった。

さらに、これらの応用として、代数学プロパーな分野以外の領域への応用も目的として掲げていた。「社会・国民等に発信する方法について」に関わる項目に関して本研究期間内に何かしらの貢献をすることを予定していた。本研究機関内の役割を担う形として、本研究では、研究の過程で得られた結果を情報系分野や教育系分野 (特に数学教育分野) へ応用をすることも視野に入れていた (当初の目的 2)。

3. 研究の方法

平成 23 年度 (2011 年) から平成 25 年度 (2013 年) までの 3 年間の研究の方法は以下の通りとした。

本助成金を平成 23 度 (2011 年) は, 本研究機関の国内旅費と備品や物品に関して重点的に使用し, 平成 24 年度/平成 25 年度(2012 年/2013 年) は, 国内外の旅費に関して重点的に当てる.

平成 23 年度は, 本科学研究費申請期間 (3 年間) の初年度であるので, 本研究機関の設備・備品について整備をした.

研究成果を公表することや, 他の分野の研究成果について情報を得る活動は, 本研究になくはならない. 平成 23 年度以後については, 本科学研究費申請期間 (3 年間) の旅費に関しては, 毎年定期的に行われているいくつかの研究集会に参加をした. そこで, 当時最新の研究の進展についてのその情報交換をはかった.

1. 日本数学会 (毎年 9 月, 3 月)
2. 可換環論シンポジウム (毎年 11 月, 12 月)

3. 可換環論セミナー (毎年 1 月)

4. 米沢数学セミナー (毎年 7 月)

他, 関連研究者との研究打ち合わせを行った. 平成 24 年度は第 25 回可換環論セミナー (下記) の世話役の一人, 最終年度の平成 25 年度は, 第 35 回可換環論シンポジウム (下記) の世話役の一人となり, 国際的な研究者からいくつか有益な情報を得た. 他, 本研究機関 (奈良教育大学) において次の通り研究会を開き, 本研究代表者がその世話役を行った. それらをまとめ, 以下に列挙する.

研究会: Workshop on Commutative Algebra 2014 in Nara University of Education,
日程: 2014 年 3 月 7 日 (金) 16:10~20:00
開催場所: 奈良教育大学 新館 2 号棟 R5-212,

シンポジウム: 第 35 回可換環論シンポジウム,

開催日程: 平成 25 年 12 月 2 日 (月) から 12 月 6 日 (金) まで,

開催場所: 京都大学数理解析研究所 420 号室,

研究集会: 第 25 回可換環論セミナー,
開催日程: 平成 25 年 1 月 30 日 (水) から 2 月 2 日 (土) まで,

開催場所: 奈良新公会堂 会議室 1,

研究会: Workshop on Commutative Algebra 2012 in Nara University of Education ~ Cohomology theory and Related topics ~,
日程: 2012 年 2 月 4 日 (土) 9:50~ 19:00,
開催場所: 奈良教育大学 新館 2 号棟 R5-212,

研究会: Workshop on Commutative Algebra 2011 in Nara University of Education ~Commutative Algebra and Related topics~,
日程: 平成 23 年 11 月 4 日 (金), 5 日 (土), 6 日 (日),
開催場所: 奈良教育大学 新館 2 号棟 R5-212,

研究会: 「数学の研究の教育への応用についての検討会 11 ~局所コホモロジー加群およびその周辺 11~」 RIMS 共同研究 奈良教育大学 研究打合せ

日程: 平成 23 年 8 月 23 日 (火), 24 日 (水), 25 日 (木),

開催場所: 奈良教育大学 新館 2 号棟 R5-212.

最終年度の平成 25 年度に the University of South Carolina (米国) で行われた国際的な Conference および Workshop において成果発表を行った (学会発表 を参照).

4. 研究成果

本科学研究費助成金による成果は, おもに次の定理を得ることができたことである.

定理 1. (A, m) を局所環, I を A のイデアルとする. A -加群の部分圏 $M(A, I)\text{cof}$ を下記のように定義する. A -加群の集合 $M(A, I)\text{cof}$ の対象 N を, 次の条件を満たす A -加群 とする.

(*) $\text{Supp}_A(N)$ が $V(J)$ に含まれ, そして $\text{Ext}^j(A/I, N)$ は すべて j に対して有限生成である.

A -加群の集合 $M(A, I)\text{cof}$ の射を, A -加群の準同型写像とする. このとき, もし I が 単項イデアルであるならば, $M(A, I)\text{cof}$ はアーベル圏である.

定理 2. R を次元 d の正則環とし, J を R のイデアル, $N\cdot$ を (導来圏 $D^+(R)$ 内の) 下に有界な複体とする. さらに 環 R は J -進位相で完備とする. このとき次は同値である.

(i) $N\cdot$ は J -余有限である;

(ii) (a) すべての i について, コホモロジー加群 $H^i(N\cdot)$ の台が $V(J)$ に属し, かつ,
(b) 複体 $N\cdot$ は下記の主張 1 の同値関係を満たす.

主張 1. R を環, J を R のイデアルとする. さらに $N\cdot$ を下に有界な複体とする. このとき次の条件は同値である:

(i) $\text{Ext}^j(R/J, N\cdot)$ はすべての j について R 上有限生成 (of finite type over R) である;

(ii) $\text{Ext}^j(R/J, N\cdot)$ はすべての j について R 上有限生成である;

(iii) $\text{Ext}^j(R/P, N\cdot)$ は, すべての j とすべての $\text{Min}(R/J)$ に属する素イデアル P について R 上有限生成である;

(iv) $\text{Ext}^j(W, N\cdot)$ は, すべての j と $\text{Supp} W$ が $V(J)$ に含まれるようなすべての R 上有限生成 R -加群 W について R 上有限生成である;

(v) $\text{Ext}^j(W\cdot, N\cdot)$ は, すべての l につい

て $\text{Supp } H^i(W \cdot)$ が $V(J)$ に含まれ、 $H^i(W \cdot)$ が R 上有限生成であるような $D_{\text{ft}}(R)$ に属する有界な複体 $W \cdot$ について、すべての j について R 上有限生成である;

(vi) $\text{Ext}^j(W \cdot, N \cdot)$ は、すべての i について $\text{Supp } H^i(W \cdot)$ が $V(J)$ に含まれ、 $H^i(W \cdot)$ が R 上有限生成であるような $D_{\text{ft}}(R)$ に属する下に有界な複体 $W \cdot$ について、すべての j について R 上有限生成である;

ただし $\text{Min}(R/J)$ は、 R/J のすべての極小素イデアルの集合を表す。

R. Hartshorne により 1960 年代に、以下の問題が提起された (第二問題と第四問題):

問題 (第二問題) 上記の条件 (*) を満たす R -加群 N からなる R -加群の部分圏 $M(R, J)\text{cof}$ はアーベル圏であるか?

問題 (第四問題) 次の特徴付けをみたす R -加群のアーベル圏 $M\text{cof}$ は存在するか? $N \cdot$ が $D(R, J)\text{cof}$ に属する必要十分条件は「すべての i に対して $H^i(N \cdot)$ が $M\text{cof}$ に属する」となることである。ここで $D(R, J)\text{cof}$ は J -双対関手による $D_{\text{ft}}(R)$ の本質的な像を表す。

定理 2 は実際に R. Hartshorne によって与えられたものであるが、主張 1 を含めて、その結果の拡張として考えられる。

本科学研究費助成期間において、当初の目的であった Lyubeznik number の特徴付けについては、成果を得ることはできなかった。一方で、上記の 2 つの問題に関し、イデアル I が A の可換ネーター局所環の単項イデアルであるとき、 $M(A, I)\text{cof}$ がアーベル圏である事を証明することができた。イデアル I が 2 元生成である場合は反例が知られている。また複体が J -余有限複体になるための特徴付けに関する定理の拡張および Ext -加群が有限となるための 6 つの同値な条件についてその同値性の正確な証明を与えることができた。

当初の目的 2 として計画していた代数学プロパーな分野以外の領域への応用や「社会・国民等に発信する方法について」に関わる項目に関しては、いくつかの研究会において講演を行うことができた (下記、学会発表 を参照)。

補足: 当初の目的 (目的 1) であった Lyubeznik number の特徴付けに関した、その不分岐正則局所環における問題については、South Carolina 大学 (米国) で行われた研究集会において、反例が発見されたことが Luis Nunez - Betancourt (University of Virginia) により報告があったことは補足しなければならない。

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)[雑誌論文](計 7 件)年代をさかのぼり記載する。

川崎 謙一郎, 'On a characterization of cofinite complexes, Addendum to 'On a category of conite modules which is Abelian'', Ken-ichiroh Kawasaki 単著, Mathematische Zeitschrift, (2013) Vol. 275, 641--646 (独国), Springer 社, Online published in the Mathematische Zeitschrift, on March 26, in 2013, 査読あり。

川崎 謙一郎, 'On the category of cofinite modules for principal ideals', Ken-ichiroh Kawasaki 単著, Nihonkai Journal of Mathematics, Vol.22, No 2, (2011), pp. 67--71 (日本国), 査読あり。

川崎 謙一郎, 'On finiteness of the Betti numbers of local cohomology modules', Ken-ichiroh Kawasaki 単著, Bulletin of Nara University of Education, Natural Science, Vol.60, No 2, (2011), pp. 15--17 (日本国), 査読あり。

川崎 謙一郎, 'The category of cofinite modules for ideals of dimension one and codimension one', Ken-ichiroh Kawasaki 単著, Actes des rencontres du Centre international de rencontres mathématiques, Vol. 2, no 2 (2010), pp. 123 -- 126 (仏国), Troisième Rencontre Internationale sur les Polynômes a Valeurs Entières Rencontre Organisée par: Sabine Evrard, 12 novembre --- 3 Décembre 2010 (Proceedings of the Third International Meeting on Integer Valued Polynomials and Problems in Commutative Algebra). 掲載 URL:

<http://acirm.cedram.org/cgi-bin/browse>
補足: フランス数学会管轄の国際研究集会の Proceeding であり、査読プロセスを踏んでいることは補足する。2010 年発行の体裁をとっているが、Mon, 7 Nov. 2011 に e-print 掲載決定の通知があったものである、査読あり。

花木 良, 'On strongly almost trivial embeddings of graphs', Ryo Hanaki 単著, Journal of Graph Theory (2012), Volume 70, Issue 1, 67 -- 79, 査読あり。

衛藤和文, 'Set-theoretic complete intersection monomial curves in affine four space', Kazufumi Eto 単著, Journal of Algebra, 372 (2012), 463 -- 479, 査読あり。

衛藤和文, 'Addendum to 'Set-theoretic complete intersection monomial curves in affine four space'', [J. Algebra 372 (2012) 463.479], Kazufumi Eto 単著, Journal of Algebra, 379 (2013), 426 -- 431, 査読あり。

〔学会発表〕(計 12 件)

下記の口頭発表/講演等については、研究代表者が関わったものに限定して年代をさかのぼり記載する。

川崎 謙一郎, 「正則環上の複体が余有限になるためのある特徴付けについて」,
研究集会: 日本数学会,
開催日程: 2014 年 3 月 15 日 (土) ~ 3 月 18 日 (火),
開催場所: 学習院大学 第 1 会場
発表日時: 平成 26 年 3 月 16 日 (日) (2014 年) 午前 9 時 00 分 ~ 午前 9 時 10 分,
開催地: 東京都.

中村力・中平豊・川崎謙一郎 (奈良教育大学), 「局所コホモロジー加群の次元を決定するイデアルについて」,
研究集会: Workshop on Commutative Algebra 2014 in Nara University of Education,
開催日程: 2014 年 3 月 7 日 (金),
開催場所: 奈良教育大学 新館 2 号棟 R5-212,
発表日時: 平成 26 年 3 月 7 日 (金) (2014 年) 午後 4 時 40 分 ~ 午後 3 時 10 分, 開催地: 奈良県奈良市.

中村力・中平豊・川崎謙一郎 (奈良教育大学), 「局所コホモロジー加群の次元を決定するイデアルについて」,
研究集会: 第 25 回可換環論セミナー,
開催日程: 平成 26 年 1 月 28 日 (火) ~ 平成 26 年 1 月 30 日 (木),
開催場所: 北海道教育大学札幌駅前サテライト,
発表日時: 平成 26 年 1 月 29 日 (水) (2014 年) 午後 3 時 10 分 ~ 午後 4 時 10 分,
開催地: 北海道札幌市.

川崎 謙一郎, 「On the characterizations of cofinite complexes」,
研究集会: 第 35 回 可換環論シンポジウム,
開催日程: 2013 年 12 月 2 日 (月) ~ 12 月 6 日 (金),
開催場所: 京都大学数理解析研究所 420 号室,
発表日時: Tuesday, 3 December 午後 2 時 40 分 ~ 午後 3 時 10 分,
開催地: 京都市左京区.

川崎 謙一郎, 「Several results on characterizations of cofinite complexes」,
研究集会 (国際研究集会): The conference on the Commutative Algebra -- Algebraic Geometry in the Southeast, Columbia, SC',
開催日程: November 8 ~ 10, 2013,
開催場所: LeConte and room 250 Gambrell in University of South Carolina,
発表日時: Saturday, 5:30 ~ 6:30 PM, Poster Session, room 412 LeConte.
開催地 University of South Carolina, Department of Mathematics,

1523 Greene St., Columbia, SC.

川崎 謙一郎, 「Several results on characterizations of cofinite complexes」,
研究集会: Workshop on Commutative Algebra and Algebraic Geometry in the University of South Carolina,
開催日程: November 11,
開催場所: Room 412 in LeConte College in University of South Carolina,
発表日時: Monday, 10:45 ~ 11:30 AM,
開催地 University of South Carolina, Department of Mathematics, 1523 Greene St., Columbia, SC.

川崎 謙一郎, 「余有限複体の特徴付けについて」, 研究集会: 金沢セミナー,
開催日程: 平成 25 年 9 月 14 日 (土),
開催場所: 金沢大学, 自然科学 5 号館 471 号室 (コロキウム 3), 角間キャンパス,
発表日時: 9 月 14 日 (土), 14:00 ~ 16:00 ,
開催地: 福井県金沢市.

川崎 謙一郎, 重光裕至 (奈良教育大学) 「単項イデアルに関する余有限加群の圏のアーベル性」,
研究集会: 日本数学会,
開催日程: 2012 年 3 月 26 日 (月) ~ 3 月 29 日 (木),
開催場所: 東京理科大学 (神楽坂キャンパス) 第 1 会場,
発表日時: 平成 24 年 3 月 26 日 (日) (2012 年) 14:15 ~ 16:10 の間の第 18 講演,
開催地: 東京都.

川崎 謙一郎, 「初等教科専門『算数』の 3 時間分 (代数的見地から) の授業案」,
研究集会: 数学教師に必要な数学能力とその育成法に関する研究, RIMS 共同研究,
開催日程: 平成 23 年 12 月 5 日 (月) から 12 月 8 日 (木),
開催場所: 京都大学数理解析研究所 110 室,
発表日時: 平成 23 年 12 月 6 日,
開催地: 京都市.

川崎 謙一郎, 「On the category of cofinite modules for principal ideals」,
研究集会: Workshop on Commutative Algebra 2011 in Nara University of Education ~ Commutative Algebra and Related topics ~,
開催日程: Friday, November 4 ~ Sunday, November 6, 2011,
開催場所: Location: Room No. R5-212, in the second floor of New Building No. 2,
発表日時: Monday, 11:20 ~ 11:50 AM,
開催地: Nara University of Education.

川崎 謙一郎, 「局所コホモロジー加群の自己準同型環について」,
研究会: 岡山大学「研究会・談話会・シンポジウム」,
開催日程: 2011 年 8 月 12 日 (金),
開催場所: 理学部 1 号館 代数 ゼミ室,
発表日時: 2011 年 8 月 12 日 (金) 13 時

30分～15時，
開催地：岡山大学。
川崎 謙一郎，「使える教材の工夫」，
研究集会：淡路中学校教育研究会数学部会
研究会，第1会場，
発表日時：平成22年11月19日15:00～
16:10，
開催場所：南あわじ市立南淡中学校，
開催期間：平成22年11月19日（金），
開催地：兵庫県。

〔図書〕（計 件）
なし

〔産業財産権〕
出願状況（計 件）
なし
取得状況（計 件）
なし

〔その他〕ホームページ等

第25回可換環論セミナー
開催日程 平成25年1月30日（水）から
2月2日（土）まで，
開催場所 奈良新公会堂 会議室1
URL:[http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~kawa
ken/Nara_2013_j_index.html](http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~kawa
ken/Nara_2013_j_index.html)

第35回可換環論シンポジウム
開催日程：平成25年12月2日（月）か
ら12月6日（金）まで，
開催場所：京都大学数理解析研究所420号
室，
URL:[http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~kawa
ken/kyoto_13_j_index.html](http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~kawa
ken/kyoto_13_j_index.html)（日本語），
[http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~kawaken/
kyoto_13_e_index.html](http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~kawaken/
kyoto_13_e_index.html)（英語）

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川崎 謙一郎（Kawasaki Ken-ichiroh）
奈良教育大学・教育学部・教授
研究者番号：60288040

(2) 研究分担者

花木良（Ryo Hanaki）
奈良教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：70549162

(3) 連携研究者

衛藤 和文（Eto Kazufumi）
日本工業大学・工学部・教授
研究者番号：30271357

(4) 研究協力者

中平 豊（奈良教育大学 大学院）
中村 力（奈良教育大学 大学院）