

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 10 月 20 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540049

研究課題名(和文) 平田分離拡大を中心とする環拡大の研究

研究課題名(英文) Studies of Hirata separable extensions and related ring extensions

研究代表者

池畑 秀一 (Ikehata, Shuichi)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：20116429

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：1979年に宮下庸一は歪多項式環における分離多項式と平田分離多項式を特徴づける定理を得た。研究代表者と山中聡はこれらの定理の直接的で初等的な別証明を与えた。1979年に永原賢によって歪多項式環における2次の分離多項式やガロア多項式の徹底的な研究が行われた。研究代表者と山中聡は微分型歪多項式環における永原の理論を素数次数 p の場合に拡張することを試み、いくらかの興味深い結果を得た。

研究成果の概要(英文)：In 1979, Yoichi Miyashita gave characterizations of a separable polynomial and a Hirata separable polynomial in skew polynomial rings. The research representative and Satoshi Yamanaka gave direct and elementary proofs of these theorems. Takasi Nagahara made a thorough investigation of separable polynomials and Galois polynomials of degree 2 in skew polynomial rings. The research representative and Satoshi Yamanaka tried to generalize Nagahara's results for polynomials of degree 2 to general prime degree p case, and we had some interesting results.

研究分野：代数学

キーワード：平田分離拡大 分離拡大 ガロア拡大 平田分離多項式 分離多項式 ガロア多項式 歪多項式環

1. 研究開始当初の背景

1960年代に, M. Auslander-O. Goldman や S.U. Chase-D.K. Harrison-A.R. Rosenberg 等により可換環上の分離多元環が研究され始め, 可換環のガロア拡大の概念が導入された. これに触発されて神崎照夫, F. DeMeyer, 原田学等による多元環のガロア拡大の理論へと発展していった. 非可換環の分離拡大は平田和彦と菅野孝三 (Hirata, Kazuhiko; Sugano, Kozo; On semisimple extensions and separable extensions over non commutative rings. J. Math. Soc. Japan 18 1966 360--373.) によって定義され, 宮下庸一, 岸本量夫, 永原賢等によって幅広く研究されてきた. 歪多項式環のモニック多項式による剰余環として現れる各種の分離拡大 (平田分離拡大, G-ガロア拡大, フロベニウス拡大等) についての研究の歴史を振り返ってみる. まず歪多項式環における特別なタイプの多項式について岸本量夫 (Kishimoto, Kazuo; On abelian extensions of rings. I., Math. J. Okayama Univ. 14 1970 159--174.) が研究した. 岸本の研究をさらに深めて永原賢 (Nagahara, Takasi; On separable polynomials of degree 2 in skew polynomial rings. Math. J. Okayama Univ. 19 (1976/77), no. 1, 65--95.) は, まず2次の歪多項式に対して分離多項式や Galois 多項式となる必要十分条件や同型類等について徹底的に調べた. 永原の方法は高次の多項式については適用できないが, 宮下庸一 (Miyashita, Yōichi; On a skew polynomial ring. J. Math. Soc. Japan 31 (1979), no. 2, 317--330.) は positively filtered ring の一般論を展開してその応用として, 一般次数の分離多項式の研究の手がかりを与えた. 申請者は宮下庸一の手法を用いて歪多項式環における一般次数の分離多項式および平田分離多項式の研究を行った (Ikehata, Shūichi; On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings. Math. J. Okayama Univ. 22 (1980), no. 2, 115--129.) および (Ikehata, Shūichi; Azumaya algebras and skew polynomial rings. Math. J. Okayama Univ. 23 (1981), no. 1, 19--32.) . そこで一般次数の分離多項式やフロベニウス多項式について詳細にしらべ, 後者の論文で平田分離多項式に関しては係数環が可換環の場合はほぼ満足する特徴付けを得た. 即ち係数環が可換環である自己同型型の歪多項式環が次数 n の平田分離多項式を含むということと係数環がその固定環上で次数 n の巡回ガロア拡大であること, そして歪多項式環の平田分離多項式で生成されるイデアルによる剰余環が東屋多元環であるという三つの条件が同値であることを証明した. また微分型歪多項式環では自明でない平田分離多項式が存在すれば係数環の標数は必然的に素数 p となることを示した. また自己同型型のときに対応する結果として, 係

数環が可換のとき微分型歪多項式環が自明でない平田分離多項式を含むことと係数環がその固定環上で指数1の純非分離拡大であること, そして歪多項式環の H-分離多項式で生成されるイデアルによる剰余環が東屋多元環であるという三つの条件が同値であることを証明した.

これ以後申請者は係数環が非可換の場合に平田分離多項式の研究に取り組み多項式が素数次数の場合は自己同型型歪多項式環が H-分離多項式を含むことと係数の中心がその固定環上の巡回ガロア拡大であることの同値性を示した (Ikehata, Shūichi; On H-separable polynomials of prime degree. Math. J. Okayama Univ. 33 (1991), 21--26.) . 一般の次数の場合は長い間未解決であったが, 2000年に米国の George Szeto と Lianying Xue (Szeto, George; Xue, Lianying; On the Ikehata theorem for H-separable skew polynomial rings. Math. J. Okayama Univ. 40 (2000), 27--32) が自己同型型の場合歪多項式環が次数 n の平田分離多項式を含むことと係数の中心がその固定環上の n 次の巡回ガロア拡大であることの同値性を示した. これは申請者には驚きの結果であった. 彼らが証明に成功した鍵は次の DeMeyer の定理「可換環上の巡回ガロア多元環は可換環である」であった. しかし, 微分型の歪多項式環の場合は対応する結果が成り立つかどうかまだ未解決である. 申請者はこれ以後係数環が非可換の場合の微分型歪多項式環について取り組んでいる (Ikehata, Shūichi; Purely inseparable ring extensions and H-separable polynomials. Math. J. Okayama Univ. 40 (2000), 55--63) .

2. 研究の目的

研究期間内に何をどこまで明らかにしようとするのか:

解決したい問題を具体的に列挙してみる.

(1) 「分離多項式はフロベニウス多項式か?」という宮下庸一によって提起された問題 (1979) は未解決である. 申請者や永原賢によって係数環がある程度良い性質を持つ場合は成立することが示されている. 成立するぎりぎりの条件を求めるか, あるいは反例を構成したい.

(2) 微分型歪多項式環の分離多項式について, 次数 pe の p -多項式が分離となるための必要十分条件はある等式を満たす次数 $pe-1$ 以下の多項式 y が存在することであるが, この y がどこでとれるかによって分類出来る. y が B の固定環の中でとれるとき, B の中でとれるとき, 次数が1以上でなければとれないとき, 係数環の条件によってどの場合が起こるかを調べたい. Z が半素環のときは y は必ず B の中でとれるというのが予想である. 現時点ではまだ次数が p の場合しか証明できていない (Ikehata, Shūichi; On separable and H-separable polynomials of degree p in

skew polynomial rings. Int. J. Pure Appl. Math. 51 (2009), no. 1, 149-156).

(3)多項式が平田分離多項式になるための必要十分条件は宮下庸一や筆者によって与えられている.しかし、きわめて複雑な条件で、実際にチェックできるような条件ではない.多項式が平田分離多項式となる簡明な条件を求めることは重要である.この方向では (Ikehata, Shūichi; On H-separable and Galois polynomials of degree p in skew polynomial rings. Int. Math. Forum 3 (2008), no. 29-32, 1581--1586.) で示したように、 $D(z) = 1$ となる B の中心の元 z が存在すれば、ある p 次の多項式は平田分離多項式であるという定理を得た.さらにこのタイプの定理を得たい.

(4)ここ十数年、作用素環論で平田分離拡大が重要な場面で現れ Lars Kadison 等によって研究されている.そこでは平田分離拡大を少し一般化した depth 2 の環拡大というものが出現している.歪多項式環の多項式の剰余環として現れるのはどんな場合か調べたい.

(5)一般の環拡大に関しては、申請者は (Ikehata, Shūichi; Note on Azumaya algebras and H-separable extensions. Math. J. Okayama Univ. 23 (1981), no. 1, 17--18.) という短い論文で、次のことを示した. B を可換環 G を B の自己同型からなる有限群、 A をその固定環、 D を B 上 G による自明な接合積 (trivial crossed product) とする.このとき、次は同値である. (イ) B が A 上 G -Galois 拡大である. (ロ) D は東屋 A -多元環である (ハ) D は B 上平田分離拡大である.この事実は B が可換環でない場合に Szeto 等によってさまざまな方向へ拡張されている.申請者もこの問題に対しても取り組みたい.

(6) B の微分 D が B の中心 Z の上でいつも 0 となるときは $B[X; D]$ での分離性多項式の状況は通常の可換環上の多項式環のときと似ている (Ikehata, Shūichi; A note on separable polynomials of derivation type, Int. J. Algebra, Vol. 3, 2009, no. 13-16, 707-711.) ことを示したが、一般の微分の場合に組みたい.

3. 研究の方法

非可換環の分離拡大や歪多項式環等についてすでに出版されている文献の分析をした.米国イリノイ州 Bradley 大学の George Szeto 教授と Lianyong Xue 教授は申請者と非常に近いテーマで多数の論文を執筆しているので米国に行き一緒にセミナーをし共同研究をした.研究を発展させるために、広く関連する分野の情報収集を行った.代数学、環論、表現論等の各種のシンポジウム、京都大学数理解析研究所等の研究集会に出席するとともに研究結果の発表をした.

4. 研究成果

(1)歪多項式環における多項式が分離多項式

や平田分離多項式であるための必要十分条件は 1979 年に宮下庸一によって与えられているが、山中聡と申請者は、その直接的なより分かりやすい別証明を与えた.

(2)1970 年代に永原賢によって歪多項式環における 2 次の分離多項式やガロア多項式の徹底的な研究が与えられているが、山中聡と申請者は微分型歪多項式環における永原の 2 次の結果を素数次数 p の場合に拡張することを試み、いくらかの興味深い結果を得た.また従前はガロア拡大であることは証明できても具体的にガロアコーディネートシステムを与えることはなされていなかったいくつかの拡大に対して、具体的なコーディネートを与えた.

(3)中島惇と浜口直樹によって導入された弱分離拡大について、山中聡とともに彼らの理論を進展させた.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

山中聡、池畑秀一、On weakly separable extensions, RIMS 講究録、査読無、1964 巻、代数系・論理・言語と計算機科学の新たな接点、2015、pp.113-124.

山中聡、池畑秀一、On Frobenius polynomials in skew polynomial rings, RIMS 講究録、査読無、1915 巻、計算機科学における論理・代数・言語、2014、pp.38-43.

山中聡、池畑秀一、On Galois polynomials in skew polynomial rings, RIMS 講究録、査読無、1873 巻、代数とコンピュータサイエンス、2014、pp.22-30.

Satoshi Yamanaka、Shuichi Ikehata、On Galois polynomials of degree p in skew polynomial rings of derivation type, Southeast Asian Bull. Math., 査読有、37 巻、2013、pp.625-634.

Satoshi Yamanaka、Shuichi Ikehata、An alternative proof of Miyashita's theorem in a skew polynomial ring, Int. J. Algebra, 査読有、6 巻、no. 21, 2012、pp.1011-1023.

山中聡、池畑秀一、歪多項式環における宮下の定理の別証明、RIMS 講究録、査読無、1809 巻、代数系および計算機科学基礎、2012、pp.214-223,

Shuichi Ikehata、On a theorem of A. Micali and A. Paques, Int. J. Algebra, 査読有、5 巻、no. 24, 2011、pp.1155-1159.

Shuichi Ikehata、On Galois extensions of rings with an inner automorphism group, RIMS 講究録、査読無、1769 巻、Algebras, Languages, Algorithms and Computations, 2011、pp. 66-69.

[学会発表](計 12 件)

山中聡、池畑秀一、Remarks on weakly

separable extensions, RIMS 研究集会, 代数系・論理、言語と計算機科学、2016 年 2 月 16 日、京都大学数理解析研究所

山中聡、小松弘明、池畑秀一、Morita equivalence in ring extension and congruence of functors, RIMS 研究集会, 代数系・論理、言語と計算機科学、2016 年 2 月 16 日、京都大学数理解析研究所

池畑秀一、On a theorem of G. Szeto and L. Xue, The conference on Ring Theory In honor of Professor George Szeto, 2015 年 11 月 14 日、岡山大学環境理工学部

山中聡、池畑秀一、On weakly separable extensions, RIMS 研究集会、代数系・論理・言語と計算機科学の新たな接点、2015 年 2 月 16 日、京都大学数理解析研究所

Shuichi Ikehata、Some topics on skew polynomial rings, Algebra Colloquium, 2014 年 9 月 3 日、Bradley University, Peoria, イリノイ州、米国

山中聡、池畑秀一、On Frobenius polynomials in skew polynomial rings, RIMS 研究集会、計算機科学における論理・代数・言語、2014 年 2 月 17 日、京都大学数理解析研究所

池畑秀一、歪多項式環と種々の分離拡大、環論研究集会、2013 年 7 月 6 日、大阪樟蔭女子大学関谷キャンパス、奈良県、香芝市

Shuichi Ikehata、Hirata separable polynomials and Galois polynomials in skew polynomial rings, Algebra Colloquium、2013 年 3 月 13 日、Bradley University, Peoria, イリノイ州、米国

山中聡、池畑秀一、On Galois polynomials in skew polynomial rings, RIMS 研究集会、代数とコンピュータサイエンス、2013 年 2 月 18 日、京都大学数理解析研究所

池畑秀一、Hirata separable extensions and skew polynomial rings I, II, and III, Conference in Ring theory, 2012 年 6 月 25、26、28 日、Sun Yat-Sen University (中山大学) 広州、中国

池畑秀一、An alternative proof of Miyashita's theorem in a skew polynomial ring, Algebra Colloquium、2012 年 3 月 21 日、Bradley University, Peoria, イリノイ州、米国

山中聡、池畑秀一、歪多項式環における宮下の定理の別証明、RIMS 研究集会、代数系および計算機科学基礎、2012 年 2 月 22 日、京都大学数理解析研究所

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池畑 秀一 (IKEHATA, Shuichi)

岡山大学大学院自然科学研究科、教授

研究者番号：20116429