様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９ （共通）

科学研究費助成事業　研究成果報告書

平成 ２８ 年 ６ 月 ２４ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2015
課題番号：２３５４００５０

研究課題名（和文）代数多様体の無限系列の研究

研究課題名（英文）Infinite series of algebraic varieties

研究代表者
高橋　宣能（Takahashi, Nobuyoshi）

広島大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：６０３０１２９８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 多変数巾級数の有理性判定に関する定理を、広島大学の木村俊一氏・首都大学の黒田茂氏との共同研究により発見した。応用として、モチーフ的 Euler-Chow 級数が必ずしも有理的でないことを証明した。

(2) カンドル構造を持つ代数多様体としてカンドル多様体を定義し、その構造に関する研究を行った。また、いわゆる数論的曲線からあるカンドルを定め、そのカンドルからもとの数論的曲線を復元するという問題を考察した。

研究成果の概要（英文）：(1) I showed a theorem on rationality of multivariate series in a joint work with Shun-ichi Kimura(Hiroshima University) and Shigeru Kuroda. As an application, we showed that a motivic Euler-Chow series is not necessarily rational.

(2) I defined a quandle variety as an algebraic variety endowed with a quandle operation, and studied its structure. I also associated a quandle to each arithmetic curve, and studied how to reconstruct the arithmetic curve from the associated quandle.

研究分野：代数幾何学

キーワード：カンドル多様体　母関数　モチーフ的ゼータ関数　数論的カンドル

１．研究開始当初の背景

「すべての代数多様体」を理解することは代数幾何学の主要な目標の一つである。これまでに、多様体の集合の全体像・規則性という視点から、以下のようなことが知られていた。

(1) 代数多様体の不変量、たとえば特異点の minimal discrepancy や特異 Fano 多様体の Fano 指数などについて、昇鎖・降鎖条件がしばしば観察されること。
(2) 一つの多様体に付随する多様体の無限系列について、不変量の母関数が有理性やモジュラー性などの良い性質を満たすことがあること。

研究代表者は、モティーフ的ゼータ函数の有理性に関する研究や、 jet 空間・形式的ループ空間・アーク空間の変種の構成とその応用についての模索の中から、本研究の着想に至った。

２．研究の目的

以下のことを目的とした。

(1) すべての、あるいは何らかのクラスの多様体の全体について、様々な不変量の集合の性質(たとえば降鎖律など)について調べる。
(2) 一つの多様体に付随する多様体の無限系列の例を構成し、それらの不変量の応用を図り、不変量の母関数の性質の研究を行う。

本研究の特色は、様々な代数多様体の集まりを積極的に取り扱い、鎖条件や分布といった観点から全体像を捉える、あるいは一つの多様体の研究に活かす、という点である。予想される成果としては、代数幾何学における新しい研究手法・対象を発見することを期待した。

３．研究の方法

本研究は、様々な多様体の無限系列に関して新しい現象の発見を目的とするものであるため、具体的な不変量の例の収集を行った。また、得られた例を解釈するため、多変数の場合を含む母関数の性質を調べる方法を開発した。このために、モチーフ的 Euler-Chow 級数の専門家である木村俊一氏、多項式環論の専門家である黒田茂氏との共同研究を行った。

一方で、組み合わせ論的なデータから得られるものなど、多様体の自然な無限系列を作る方法について模索した。この中で、カンドル多様体による彩色の空間を調べるという着想を得、またその整数論への展開が考えられた。そのため、トポロジー・微分幾何学・整数論などに関する知識を書籍や専門家からの知識の提供によって補い、研究の進展に活かした。

４．研究成果

(1) 不変量の母関数については、モチーフ的 Euler-Chow 級数と呼ばれるものの有理性を調べることを一つの課題とした。これに関連して、多変数巾級数の有理性判定に関する定理を、広島大学の木村俊一氏および首都大学の黒田茂氏との共同研究により発見した。応用として、モチーフ的 Euler-Chow 級数が必ずしも有理的でないことを、実例によって示した。

１つの代数多様体から、各ホモロジー類に属する部分多様体をパラメータ付けするものとして Chow 多様体が定まる。この無限系列に属する各 Chow 多様体の Euler 標数の母関数が Euler-Chow 級数と呼ばれる多変数巾級数であり、Elizondo らによってトーリック多様体の場合の有理性が証明されていた。また、その「モチーフ係数版」も考えられたが、Elizondo・木村によって有理的とは限らないことが示されていた。そこで、一般の多様体の場合に、Euler-Chow 級数の有理性が成り立つか、ということが一つの問題となった。

有理性の判定のために、多変数巾級数の錐、すなわち 0 でない係数を持つ単項式たちで生成される錐に着目する。このとき、級数が有理関数の展開であれば錐が特殊な形をしているのではないかと予期される。これは自然な期待であり、非有理性の証明に有用であると考えられたが、現在までに公表されているものを発見できなかった。実際、錐自体は必ずしも閉集合でなく、したがって有限生成でない等、微妙な問題である。

そこで、本研究においては、正しい定式化を与えて証明した。結論として、錐の閉包は有限生成な多面錐であることが分かった。証明としては、代数学的な手法および非 Archimedes 解析的な手法によるものの二つを与えた。 この結果の応用として、Euler-Chow 級数は必ずしも有理的でないことを、射影平面の９点ブローアップの例を与えることにより示した。

以上の結果は、Journal of K-theory 誌に発表した。

(2)「一つの代数多様体に付随する多様体の系列の研究」に関連して、カンドル多 様 体の研究を行った。

カンドルとは、二項演算によって定まるある種の代数系であり、彩色数などの結び目の不変量を与えるものとして多くの研究がなされている。位相空間の構造が与えられたカンドルは位相カンドルと呼ばれ、彩色数の一般化として彩色空間と呼ぶべき空間を各結び目・絡み目に対して定める 。そこで、今回の研究では、カンドル多様体を被約かつ既約な代数多様体の構造を持つカンドルとして定義した上で、本研究全体の目的に沿って、結び目の無限系列から得られる彩色空間の系列の例を計算した。この中で、彩色空間の不変量の母関数が有理的になる場合など、いくつかの現象を観察することができた。その一方で、カンドル多様体自体の性質も興味深いと思われるため、一般論について研究を行った。

対称空間や、その一般化である正則ｓ多様体は位相カンドルの例であり、ファイ空間と呼ばれるある種の等質空間としても記述できるということが微分幾何において知られていた。一方、内部自己同型群と呼ばれる群によって任意の二元が結ばれるようなカンドルを代数的に連結と呼び、正則ｓ多様体は代数的に連結なカンドルの例を与える。一方で、代数的に連結なカンドル多様体であって正則ｓ多様体に対応しないような例も容易に挙げることができる。そこで、代数的に連結なカンドル多様体の構造を記述することが望まれた。

そのために、まず、カンドル多様体の作用の軌道などについて基本的な事実を示した。これを用いて、標数０の体上で、代数的に連結なカンドル多様体が、やはりある種の等質空間として表せることを証明した。この結果に関する論文は、Transformation Groups 誌に掲載予定である。

カンドル多様体の一般論については、そのほかに、演算の無限小データが自明な場合の記述、カンドル多様体上の加群の概念に関する研究などを行った。最後のものは、カンドルのコホモロジー理論をカンドル多様体の場合に展開するための基礎となるものである。特に、線形化した代数の表現との関係について考察を行った。これは、リー群の表現とリー環の表現の対応に相当する。カンドル多様体のうち正則ｓ多様体に相当するものには、線形化としてリー山口代数と呼ばれるものが大体対応する。リー山口代数の表現については 1950 年代以来研究がなされ、いくつかの変種が定義されているが、これらがカンドル上の種々の加群の概念に対応することを観察した。

結び目とカンドル多様体に付随する彩色空間については、特に、タングルを繰り返して得られる結び目・リンクの列について彩色空間の列を調べることは興味深いと考え、いくつか具体的な系列について計算を行った。現在までの計算では、motivic ring 係数で考えた母関数や定義体の系列について興味深い現象が観察されている。

カンドル多様体については、基本的なことも含めて様々なことが未解明であり、今後大きな進展の期待できる魅力的な研究対象であると考えている。

(3)「一つの代数多様体に付随する多様体の系列の研究」に関連して、いわゆる数論的曲線からあるカンドルを定め、そのカンドルからもとの数論的曲線を復元するという問題を考察した。

結び目の同値類は、対応する「結び目カンドル」によって定まることが知 ら れ て いる。一方、数論的な状況において、数論的基本群やその準同型から多様体や射を復元する問題は、「遠アーベル幾何学」という分野として多くの研究がなされている。これに加え、結び目と素数の間には様々な類似性の成り立つことが観察されている。

そこで本研究では、いわゆる数論的曲線、すなわち代数体の整数環のスペクトラムの開集合およびその閉点の集合 M に対して、結び目カンドルのあ る 種 の類似を定めた。これは、各有限次ガロア被 覆 に 対 し てフロベニウス写像を用いて M の逆像上にカンドル構造を定義し、その射影極限を取ることにより得られる位相カンドルである。閉点の集合は、結び目補空間の中のループの類似物と考えることができる。

次に、このようにして定義されたカンドルから、もとの数論的曲線を復元する問題を研究した。まず、ガロア群との関係などの基本的な一般論を調べた。また、有理数体または二次体の整数環のスペクトラムから一点を除いたものについて、基本群のアーベル化が無限群であり、ループに対 応 す る 素 数の集合 M が密度１である場合に、かなり多くの 情 報をカンドルから復元できることを証明した。証明は p 進数の超越性に関する ”p-adic Six Exponentials Theorem ” あるいはその一般化を用いるものであり、手法自体も興味深いと考えられる。

この研究については、東京大学・九州大学での研究集会において口頭発表を行った。また、論文は現在投稿中である。

数論的曲線に付随するカンドルは、数論的曲線と三次元多様体・結び目理論の類似において、新しい視点を提供するものと期待している。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４件）
1. Takahashi Nobuyoshi, Quandle varieties, generalized symmetric spaces and \vaphi-spaces, Transformation Groups, 査読あり, 21(2016),555--576.
2. Kimura Shun-ichi; Kuroda Shigeru; Takahashi Nobuyoshi, The closed cone of a rational series is rational polyhedral, J. Algebra, 査読あり, 405 (2014), 243--258.
3. Takahashi Nobuyoshi, Nonstandard point counting for algebraic varieties, Communications in Algebra, 査読あり, 41(2013), no. 3, 971--988.
4. Kimura Kenichiro; Kimura Shun-ichi; Takahashi Nobuyoshi, Motivic zeta functions in additive monoidal categories, Journal of K-Theory, 査読あり, 9(2012), no. 3, 459--473.

〔学会発表〕（計　２件）
1. 高橋宣能, Quandles associated to arithmetic schemes, Low dimensional topology and number theory VIII, 2016.3.25, 九州大学産学官連携イノベーションプラザ(福岡県福岡市)
2. 高橋宣能, Quandles in algebraic and arithmetic geometry, The 10-th Anniversary Tokyo-Seoul Conference in Mathematics - Algebraic/Arithmetic/Complex Geometry, 2015.12.5, 東京大学大学院数理科学研究科(東京都)

６．研究組織
(1)研究代表者
高橋　宣能　（TAKAHASHI NOBUYOSHI）
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60301298