

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 23 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540051

研究課題名(和文) Faith予想とその周辺の研究

研究課題名(英文) Faith conjecture and related studies

研究代表者

大城 紀代市 (oshiro, kiyochi)

山口大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：90034727

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円、(間接経費) 720,000円

研究成果の概要(和文)：Osofskyは1965年に「右入射的完全環はQF-環である」という結果を発表し、これは片側完全環でも言えるか？という問題を出した。Faithは1976年、この問題は準素環でも否定的であろうと予想した。右アルチン環が右入射的になる Fuller の判定条件がある。1993年、分担者の馬場との共同論文で、この判定条件を片側準素環にまで拡張した。この結果を用いて長年 Faith 予想を研究し、最近、斜体上の無限次元両側ベクトル空間についての問題に置き換え、その研究により、多くの場合、片側入射的準素環はQF-環になるという結果を示すことが出来た。これは大きな進展である。

研究成果の概要(英文)：In 1965, Osofsky showed "right injective perfect rings are QF-rings" and raised : Are right injective right perfect rings QF?. In 1976, Faith conjectured this is not true even for semiprimary rings. Since then, almost half century passed. In 2011, Oshiro showed this problem is true for many cases.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：代数学・環論

キーワード：環論 Faith 予想 4元数環 準フロベニウ環

1. 研究開始当初の背景

1980年、原田学により、新しい二つのアルチン環が発見された。研究代表者はこの二つの環は同一の環であることを証明し、その環を Harada 環と呼び、その構造論を構築した。Harada 環は古典的アルチン環である quasi-Frobenius 環や Nakayama 環と三つ巴になって深く関連し光彩を放す環であることの理論を展開し、この新しいアルチン環を応用して古典的アルチン環の再考察を行い、その過程で、森田の自己双対性を持つ環、Nakayama 自己同型写像、skew-matrix 環、quasi-Frobenius 環の構成等など多岐にわたる研究を蘇生させ、次のような広範な基礎的研究を行った。

(1) Harada 環の内部構造における Λ -quasi-Frobenius 環の研究。Harada 環は Λ -quasi-Frobenius 環を内部に持ちそのブロック拡大の上階段型剰余環として構成されるという構造論を確立した。

(2) Nakayama 環の完全な構造論の構築。その構造論は、Nakayama 環は、局所 quasi-Frobenius 環の skew-matrix 環を作り、そのブロック拡大の上階段型剰余環 (Harada 環となる) として実現できることを示した。Nakayama 環は重層的で自己完結型のアルチン環であり、skew-matrix 環がその本質であるという理論である。

(3) skew-matrix ring の導入とその基礎的性質の研究。

(4) アルチン環上の直既約射影加群が入射的になるための Fuller の判定条件の研究。分担者の馬場との共同研究で、その判定条件を準素環にまで拡張した。この研究が Faith 予想の研究に繋がった。Faith 予想とは、研究目的で簡潔に述べるが、片側入射的準素環は quasi-Frobenius 環であるか? という問題に対する否定的な予想である。

(5) 森田自己双対性を持つアルチン環の研究。有限次元多元環は、自明に森田自己双対性を持つアルチン環である。しかし、一般のアルチン環で森田自己双対性を持つ環は、きわめて少ない。知られている例はせいぜい quasi-Frobenius 環と Nakayama 環ぐらいである。そのことと Harada 環がかなり強い自己双対性を持っていることから Harada 環も森田自己双対性を持つのではないかという問題が提起される。研究代表者は、quasi-Frobenius 環で、Nakayama 自己同型写像 (Nakayama 置換を引き起こす同型写像) を定義し、この問題を一般に quasi-Frobenius 環はいつも Nakayama 自己同型写像を持つかどうかの問題に置き換

えた。これに対して、研究分担者の小池が Kraemer の結果を用いて、反例を示した。これは、アルチン環における非常に重要な結果である。Nakayama 自己同型写像を持つ quasi-Frobenius 環から Harada 環を構成すると様々な自己双対性を持つ新しいアルチン環が作れる。これは、森田理論における大きな進展となる結果である。

(6) 代数閉体上の Nakayama 群環 (group ring) の研究。Nakayama 環の構造論を代数閉体上の群環 (group ring) に応用し、5 次以下の対称群や交代群がいつ Nakayama 環になるかを決定した。

(7) Quasi-Frobenius 環の構成方法の研究。Quasi-Frobenius 環は環論における最も重要な研究対象である。しかしながら多元環でない純非可換版の Quasi-Frobenius 環の例は皆無に等しい。Harada 環、Nakayama 環、そして Faith 予想の研究において局所 quasi-Frobenius 環が本質的に重要な環である。このことから、quasi-Frobenius 環の構成方法の研究が必要になり、連携研究者の菊政、研究協力者の吉村との共同研究で様々な quasi-Frobenius 環の例を示すことが出来た。これも著しい研究成果である。

(8) lifting 加群と extending の研究。この 2 つの加群の明確な定義を与え、これらの加群の研究により、Harada 環や Nakayama 環を加群論的に特徴づけた。lifting 加群と extending 加群は、その後、国内外の多くの研究者によって研究され、いくつかの専門書も出版された。この状況も原田学と研究代表者の基盤的研究があつての展開である。

以上の基盤的研究は、過去 30 年以上にもわたるアルチン環の底流における顕著な研究ともいえるものである。これらの研究成果を土台にして、研究分担者の馬場との共著で専門書

“ Classical Artinian Rings and Related Topics “

を 2009 年 World Scientific 社から出版した。

本研究では、これらの研究を背景にして、更なる研究と (4) で述べた Faith 予想の完全解決をめざしての研究を行っている。

2. 研究の目的

Osofsky は 1965 年に “ 右、左入射的完全環は quasi-Frobenius 環である ”

という結果を Journal of Algebra で発表し、

この結果は
“片側完全環でも言えるか？”

という問題を提起した。この問題に対して、Faith は 1976 年彼の著書 Algebra II で、この問題は準素環でも否定的であろうと予想した。つまり、完全環より強い準素環で新たに

“右入射的完全環は quasi-Frobenius 環であるか？”

という問題を提起して、否定的に予想したのである。研究の背景でも述べたように、アルチン環が右入射的になるための Fuller の有名な判定条件がある。1993 年、分担者馬場との共同論文で、この判定条件を片側入射的準素環にまで拡張した。この結果を用いれば Faith 予想が解けると思ったのだが、成功せず、悶々と 20 年以上も追い求めることになってしまった。しかし、その後、少しずつこの予想の核心が明らかになり、現在は、この予想が、斜体上の右も左も無限次元の両側ベクトル空間についての誰でも理解できるような問題に置き換えることができた。この新たな視点で、問題を解決するのが本研究の主目的である。

3. 研究の方法

Faith 予想は、結局、斜体 D 上の両側空間 V とその右空間としての双対空間 $V(*)$ との間に (D, D) -同型があるかという問題に帰着できた。この問題は、環論の問題というより、数学の根底にかかわる重要な問題であり、Faith 予想の深遠さをよく物語っている。

この言い換えによる新たな問題解決のため、更に V として $D \times D$ なる次元 (D, D) 空間を考えればよいというところまで問題をしばることが出来た。これは、著しい大きな前進であり、この方法により Faith 予想を研究している。

4. 研究成果

$V = D \times D$ の右次元 A がアレフ 0 以上、左次元が A より大きく、 V と $V(*)$ が (D, D) -同型なる D, V があるかが Faith 予想の本質的問題になったのだが、2011 年 D が可換体や中心上有限次元、或いは中心上アレフ 0 次元の場合は、このような D と V は存在しないことが証明できた。

この結果は、Faith 予想に関する初めての著しい結果であり、2011 年 6 月、韓国 Kyung Hee 大学で開催された第 6 回日-中-韓国国際環論研究集会で発表し、論文としては、その報告集に掲載された。現在この論文は国内外で反響を呼んでいる。Faith もこの結果を非常に喜んでくれた。2012 年 9 月アメリカを訪問し、オハイオ大学、オハイオ州立大学で Faith 予想についての講演をおこなっ

た。Faith は、今年の一ヶ月残念ながら他界した。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

1. 小池寿俊

(編集) Proceedings of the 45th symposium on Ring Theory and Representation Theory, 178 p. 2013、査読無

2. 菊政 勲、吉村 浩、大城紀代市

A construction of local QF-rings and its characterization, Communication in Algebra, 40, 4639-4660 (2012) 査読有

3. 大城紀代市

On the conjecture of Faith, Proceedings 6th China-Korea-Japan International Symposium on Ring Theory, World Sci. Publ., 152-162 (2012) 査読有

4. 小池寿俊

(書評) Y. Baba and K. Oshiro: Classical Artinian Rings and related Topics, 数学(日本数学会) 第 64 巻, 432-436, 2012 査読有

5. 小池寿俊

Morita duality and ring extensions, J. Algebra and its Appl. 12, No 2, Paper No. 1250160, 23 p. 2012 査読有

6. 馬場良始

On almost simple injectives, Mathematical Journal of Okayama University, 53, 101-109, 2012 査読有

[学会発表](計 3 件)

1. 馬場良始

古典的アルチン環と関連する話題、第 57 回代数学シンポジウム、広島大学理学部(東広島市) 2013 年 8 月 26 日

2. 大城紀代市

On the conjecture of Faith, OSU RING Theory Seminar talk, Ohio 州立大学(米国、コロンバス市) 2012 年 9 月 14 日

3. 大城紀代市

On the conjecture of Faith, 6th, China-Korea-Japan International

Symposium on Ring Theory, Kyung Hee 大
学 (韓国、ソウル市)、2011 年 6 月 28 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕(計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大城 紀代市 (Oshiro Kiyochi)
山口大学・名誉教授
研究者番号：90034727

(2) 研究分担者

馬場 良始 (Baba Yosiyomo)
大阪教育大学・教育学部・教授
研究者番号：10201724

小池 寿俊 (Koike Kazutoshi)
沖縄工業高等専門学校・総合科学科・教授
研究者番号：20225337

(3) 連携研究者

菊政 勲 (Kikumasa Isao)
山口大学・理工学研究科・教授
研究者番号：70234200