

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 10 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540053

研究課題名(和文) Stanley-Reisner イデアルの極小自由分解と算術階数

研究課題名(英文) Minimal free resolutions and the arithmetical rank of Stanley-Reisner ideals

研究代表者

寺井 直樹 (Terai, Naoki)

佐賀大学・文化教育学部・教授

研究者番号：90259862

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000 円、(間接経費) 1,170,000 円

研究成果の概要(和文)：多項式環の被約単項式イデアルである Stanley-Reisner イデアルの算術階数について研究した。Stanley-Reisner イデアルに関してはその算術階数はその剰余環の極小自由分解の長さ、つまり、その剰余環の射影次元以上であることが知られている。林の辺イデアルの算術階数はその剰余環の射影次元に等しいと Barile により予想されていたのであるが、それに対して肯定的な答えを与えた。また高さ 3 の Gorenstein Stanley-Reisner イデアルについてもその算術階数はその剰余環の射影次元 3 となることを示した。

研究成果の概要(英文)：We studied the arithmetical rank of Stanley-Reisner ideals, which are squarefree monomial ideals in a polynomial ring. It is known that the arithmetical rank of a Stanley-Reisner ideal is greater than or equal to the projective dimension of the Stanley-Reisner ring, which is the length of the minimal free resolutions of the quotient ring. As for the edge ideal of a forest, Barile conjectures that these numbers will be coincident. We proved it. As for a Gorenstein Stanley-Reisner ideal of height three, we proved that its arithmetical rank is equal to the projective dimension of the Stanley-Reisner ring, too.

研究分野：可換環論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Stanley-Reisner ideal minimal free resolution arithmetical rank

1. 研究開始当初の背景

イデアルの算術階数とは、そのイデアルが定義する空間がスキーム構造を無視して何枚の超曲面の交わりとして表現されるかという最小数、あるいは、イデアルの言葉では、そのイデアルと根基イデアルを同じくするイデアルの中で極小生成系の元の個数が最小であるものの極小生成系の元の個数である。イデアルの算術階数を求めることは可換環論・代数幾何学における伝統的な問題である。基盤研究(C)「Stanley-Reisner 環の重複度と極小自由分解に関する研究」(平成20～22年度)の研究成果のひとつとして、従来の方法と組合せ論的手法を結びつけて生成元の個数がそのイデアルの高さに十分近い Stanley-Reisner イデアルの算術階数を決定した。また、Stanley-Reisner イデアルが次数2の線形自由分解を持つ場合、及び、単体的複体が1次元 Gorenstein となる場合にも算術階数を決定した。また連携研究者の木村は高さ2の Cohen-Macaulay Stanley-Reisner イデアルの算術階数を決定した。それらの結果を受けて、さらに他の単項式イデアルのクラスに対しても算術階数を決定できることが期待された。

2. 研究の目的

被約単項式イデアルである Stanley-Reisner イデアル及び、多項式環を Stanley-Reisner イデアルで割った環である Stanley-Reisner 環は可換環論的観点のみならず Stanley-Reisner 環から定まる単体的複体を通して組合せ論、トポロジーとも深く関係しており、とても興味深い研究対象である。本研究は Stanley-Reisner イデアル及び Stanley-Reisner 環の極小自由分解に現われる様々な不変量相互の関係を探ることを目的とする。特に Stanley-Reisner イデアルの

算術階数と射影次元の関係を問題とする。

Stanley-Reisner イデアルの場合、その Stanley-Reisner 環の射影次元が Stanley-Reisner イデアルの算術階数の下限を与えていることが知られている。それで、いつこの二つの不変量が一致するかが問題の焦点となる。このことを中心に研究することにした。

3. 研究の方法

Stanley-Reisner イデアルの極小自由分解についてその可換環論的、組合せ論的性質を考察するために、まず具体的な Stanley-Reisner イデアルについて、組織的に不変量の計算を行いデータを収集した。それらのデータから帰納的に組合せ論的法則、代数的メカニズムを推測し証明しようと試みた。また、一般の次数つき環と相違に注意をはらいつつ、それらにも共通する性質をグレーブナー基底の理論を用いて導出しようとした。また、より抽象的にホモロジカルな性質を圏論的に考えた。

以上のように、組合せ論的観点、位相幾何学的観点、純可換環論的観点、圏論的観点のそれぞれの長所をとりいれ、研究代表者、研究分担者の間で緊密な連絡をとりながら総合的に研究していった。

4. 研究成果

本研究の目的は、Stanley-Reisner イデアルの算術階数と極小自由分解についてその可換環論的、ホモロジー代数的性質を考察し、組合せ論的応用を探ることにある。イデアルの算術階数とは、そのイデアルが定義する空間が集合として何枚の超曲面の交わりとして表現されるかという最小数、あるいはイデアルの言葉では、そのイデアルと根基イデアルを同じくするイデアルの中で極小生成系の元の個数が最少であるものの極小生成系の元の個数である。イデアルの算術階数を求

めることは可換環論・代数幾何学における伝統的な問題である。Stanley-Reisner イデアルに関してはその算術階数はその剰余環の極小自由分解の長さ、つまり、その剰余環の射影次元以上であることが知られている。そこで、これら2つの不変量がいつ等しくなるかが問題となる。林の辺イデアルの算術階数はその剰余環の射影次元に等しいと Barile により予想されていたのであるが、他の分担者や連携研究者から様々な示唆を得ながら研究代表者と連携研究者の木村杏子との共同研究によりそれに対して肯定的な答えを与えた。また、このことに付随して、林はある種の組合せ論的分解を持つことを示した。また高さ3の Gorenstein Stanley-Reisner イデアルに関して同様の問題を考察した。

この場合は巡回多面体の境界複体の Stanley-Reisner イデアルに帰着されることがわかり、その算術階数はその剰余環の射影次元3となることがわかった。

また、Stanley-Reisner イデアルのべきの射影次元に関して研究した。Stanley-Reisner イデアルのべきの極化とヤング図形のある種の操作に関係づけることにより高さ2の場合にはべきに関して広義単調増加であることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

1, K. Kimura, N. Terai, and K. Yoshida, Licci squarefree monomial ideals generated in degree two or with deviation two. J. Algebra 390 (2013), 264-289 査読有.

2, K. Kimura, N. Terai, Binomial arithmetical rank of edge ideals of forests. Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), no. 6, 1925-1932 査読有.

3, K. Kimura, G. Rinaldo, and N. Terai, Arithmetical rank of squarefree monomial ideals generated by five elements or with arithmetic degree four, Communications in Algebra 40 (2012) 4147-4170 査読有.

4, N. Terai, and N. Trung, Cohen-Macaulayness of large powers of Stanley-Reisner ideals, Advances in Mathematics 229 (2012) 711-730 査読有.

5, V. Bonanzinga, L. Rorrenti, and N. Terai, Pure and Cohen-Macaulay simplicial complexes associated with squarefree lexsegment ideals, Communications in Algebra 40 (2012) 4195-4214 査読有.

6, S. Saeedi Madani, D. Kiani, N. Terai, Sequentially Cohen-Macaulay path ideals of cycles, Bulletin Mathématique de la Societe des Sciences Mathématiques de Roumanie (N.S.) 54(102)(2011) 353-363 査読有.

7, G. Rinaldo, N. Terai, and K. Yoshida, Cohen-Macaulayness for symbolic power ideals of edge ideals, Journal of Algebra 347(2011) 1-22 査読有.

8, G. Rinaldo, N. Terai, and K. Yoshida, On the second powers of Stanley-Reisner ideals, Journal of Commutative Algebra 3 (2011) 405-430 査読有.

9, K. Kimura, N. Terai, and K. Yoshida, Schmitt-Vogel type lemma for reductions, Archiv der Mathematik (Basel) 96 (2011) 535-545 査読有.

10, M. Mahmoudi, A. Mousivand, M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai, and S. Yassemi, Vertex decomposability and regularity of very

well-covered graphs, Journal of Pure and Applied Algebra 215(2011) 2473-2480 査読有.

11, M. Barile and N. Terai, The Stanley-Reisner ideals of polygons as set-theoretic complete intersections, Communications in Algebra 39(2011) 621-633 査読有.

〔学会発表〕(計 10 件)

1, 寺井直樹, Licci squarefree monomial ideals, International conference on commutative algebra and its interaction to algebraic geometry and combinatorics, 平成 25 年 12 月 9 日 Vitetnam Institute for Advanced Study in Mathematics, Hanoi

2, 木村杏子, 寺井直樹, Arithmetical rank of Gorenstein squarefree monomial ideals of height three, RIMS 研究集会 第 35 回可換環論シンポジウム, 平成 25 年 12 月 5 日 京都大学数理解析研究所

3, 寺井直樹, Licci edge ideal の分類について, 日本数学会 2013 年度年会 平成 25 年 3 月 21 日 京都大学

4, 寺井直樹, Squarefree monomial ideal の記号的冪の深さ, 第 25 回可換環論セミナー 平成 25 年 1 月 31 日 奈良公会堂

5, 寺井直樹 stacked polytope とその Stanley-Reisner 環の極小自由分解 第 12 回静岡代数学セミナー 平成 24 年 12 月 15 日 静岡大学

6, 寺井直樹, ヤング図形と squarefree monomial ideal の記号的冪の射影次元 第 12 回静岡代数学セミナー 平成 24 年 12 月 14 日, 静岡大学

7, 寺井直樹, Licci monomial ideals of

small multiplicity, 第 34 回可換環論シンポジウム, 平成 24 年 11 月 26 日 葉山生産性センター

8, 木村杏子, 寺井直樹, 木のエッジイデアルの算術階数, 第 24 回可換環論セミナー, 平成 24 年 1 月 31 日, 霧島市市民サービスセンター

9, 寺井直樹, Mixed symbolic powers of the Stanley-Reisner ideals of graphs, The 7-th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 平成 23 年 12 月 14 日 Quy nhon 大学 ベトナム

10, 木村杏子, 寺井直樹, 吉田健一, Licci monomial ideals, 第 33 回可換環論シンポジウム, 平成 23 年 11 月 7 日, 浜名湖カリアック

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織
(1) 研究代表者

寺井 直樹 (TERAI NAOKI)
佐賀大学・文化教育学部・教授
研究者番号：90259862

(2)研究分担者

上原 健 (UEHARA TSUYOSHI)
佐賀大学・工学系研究科・教授
研究者番号：80093970

市川 尚志 (ICHIKAWA TAKASHI)
佐賀大学・工学系研究科・教授
研究者番号：20201923

宮崎 誓 (MIYAZAKI CHIKASHI)
佐賀大学・工学系研究科・教授
研究者番号：90229831

河合 茂生 (KAWAI SHIGEO)
佐賀大学・文化教育学部・教授
研究者番号：30186043

(3)連携研究者

吉田 健一 (YOSHIDA KENICHI)
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：80240802

柳川 浩二 (YANAGAWA KOUJI)
関西大学・工学部・准教授
研究者番号：40283006

木村 杏子 (KIMURA KYOUKO)
静岡大学大学院理学研究科・助教
研究者番号：60572633

村井 聡 (MURAI SATOSHI)
山口大学理学部・講師
研究者番号：90570804