様 式 C−19、F−19、Z−19 （共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年 　５ 月 ２４ 日現在

機関番号：３７１１１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2015
課題番号：２３５４００６２

研究課題名（和文）トーリック森理論の発展と応用に関する研究

研究課題名（英文）Studies on developments and applications for the toric Mori theory

研究代表者
佐藤　拓（Sato, Hiroshi）

福岡大学・理学部・准教授

研究者番号：２０４３３３１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、主として、滑らかな射影的トーリック多様体であって、第二チャーン指標が非負であるようなものの研究を行った。トーリック多様体上の２サイクルを計算する方法を発展させ、特に、ファノ収縮写像を持つ場合について、そのような多様体の幾何的構造を完全に決定した。更にファノ性を仮定した、いわゆるトーリック・２ファノ多様体の分類も特殊な場合について行った。他に、通常のトーリック森理論や変形理論に関する結果も得ている。

研究成果の概要（英文）：In this research, we mainly studied about smooth projective toric varieties whose second Chern characters are non-negative. We studied a new method to calculate two-cycles on toric manifolds, and as a result, we completely determined the geometric structure of such manifolds when they have a Fano contraction. Moreover, we obtained a classification result about toric 2-Fano manifolds for a special case. Also we obtained some results about the ordinary toric Mori theory and the deformation theory of toric varieties.

研究分野：代数幾何学

キーワード：トーリック多様体　２ファノ多様体　森理論　変形理論

１．研究開始当初の背景

Starr 等によって導入された２ファノ多様体の概念は、有理曲線が主役だった通常の森理論の次の理論を目指すものであった。すなわち、第二チャーン指標が正、という単純な条件を仮定したとき、代数多様体上に有理曲面が豊富に存在するか、というのが Starr の問であった。しかしながら、このような問題を代数多様体一般で考えるのは非常に困難であり、当初もそうであったが、現在でもまとまった研究結果は皆無である。このことは、代数多様体上の中間次元のサイクルを一般的に扱うことの難しさを示していると言える。

そこで、本研究の前段階では、代数多様体一般で考えるのではなく、トーリック多様体という良い代数多様体のクラスに限定して先駆的な研究を目指す、というのが最初の動機であった。トーリック多様体の理論では、扇と呼ばれる比較的扱いやすい組合せ論的な対象の言葉を用いて代数多様体の様々な性質が表現され、特に中間次元のサイクルも比較的容易に扱うことが出来るのである。トーリック多様体で示した性質を、一般の代数多様体に拡張する、という研究の流れは非常に多くあると思う。

具体的にどのような問題を扱うのかというと、森理論では代数多様体上の有理曲線のなすコーン、いわゆる森コーンが重要であったのに対して、有理曲面のなすコーン、２森コーンの解析を目指したのである。しかしながら、研究は困難を極め、トーリック多様体のカテゴリーに限っても、通常の理論とは異なる様相が多々見られた。そこで本研究では、研究対象をそもそもの発端である２ファノ多様体にしぼり、滑らかなトーリック・２ファノ多様体の性質の解明を目指した。トーリック・２ファノ多様体の性質が分かる、特に２森コーンの様子が分かると、一般の場合の２森コーンの様子も分かるはず、というのが本研究の目指すところである。２ファノ多様体に関する結果もほとんどない状況であり、トーリック多様体に限定して考える、というのは一つの自然な研究の流れであったと思う。

２．研究の目的

滑らかなトーリック・２ファノ多様体の性質を解明することが本研究の主な目的である。２ファノ多様体とは、第二チャーン指標が正であるようなファノ多様体のことである。以下、どのような方針があるのかを具体的に述べる。

(1) 次元を固定したときの滑らかなトーリック・２ファノ多様体の分類。先行研究により、滑らかなトーリック・ファノ多様体については、任意次元で分類が実行可能であることが知られているが、その中で２ファノ多様体になるものをリストアップする。滑らかなトーリック・ファノ多様体の分類表をしらみつぶしに調査、計算するのも一つの方法であるが、可能である限り分類表に依存せず、一般次元で応用可能な手法を用いることを目指す。それによって、トーリックとは限らない一般の２ファノ多様体に対する研究方針も見えてくるはずである。

(2) ピカール数を固定したときのトーリック・２ファノ多様体の分類。なすべきことは (1) と同じであるが、今度はピカール数を固定して分類を行う。ピカール数が３までであれば、Batyrev 等による、滑らかな射影的トーリック多様体に関する分類結果が存在するので、スムーズに分類が実行出来るはずである。それより大きい場合については、滑らかなトーリック・ファノ多様体に関する性質を研究しながら遂行する。先述した通り、滑らかなトーリック・ファノ多様体の分類は完成したと言えるのであるが、その性質の解析には無論意味がある。例えば、次元を固定したときの滑らかなトーリック・ファノ多様体全体にある種の同値関係を導入し、全体の様相を研究する流れがある。

(3) 滑らかなトーリック・弱２ファノ多様体への一般化。２ファノ多様体に対する条件を、第二チャーン指標が非負、と弱めて、同様の研究を展開する。滑らかなトーリック・ファノ多様体と滑らかなトーリック・弱ファノ多様体の差はある意味絶望的なものであったが、この場合はそれほどでもないようである。すなわち、トーリック・弱２ファノ多様体のクラスも幾何的な良い性質を持ちそうである。そもそも、Starr は弱２ファノ多様体を最初の研究対象としていた。

(4) 上記研究から、ファノ多様体という仮定をはずす。先行研究及び観測より、ファノ多様体という条件を外して、滑らかな射影的トーリック多様体であって第二チャーン指標が正または非負、というトーリック多様体のクラスにおいて、同様の分類、研究を行っても幾何学的に意味がありそうな性質が幾つか発見されている。ファノ性はトーリック多様体の同型類の有限性を導くが、それなしに多様体の幾何構造が決定するのは興味深いところである。

(5) トーリック多様体上の２サイクルの研究。上記の研究とも関係することであるが、トーリック多様体上の２サイクルをある程度自由に扱えることを目指す。トーリック多様体と言えば扇、多面体等の組み合わせ論的な対象と綺麗な対応があることが強みであるが、それらの道具を使って、２サイクルを自由に扱えるようにするのである。先行研究が幾つか存在するが、理論的にもう少し整備する必要があ

る。

(6) ２森コーンの解析。究極的にはこの問題に行き着くのであるが、トーリック・２ファノ多様体の分類、研究等から、２森コーンの研究、有理曲面を主役に据えた双有理幾何の導入を目指す。２森コーンの端射線にも何かしらの意味があるはずである。

(7) 高次のサイクルについての研究。今まで述べたことを一歩進めて、高次元の有理部分多様体を主役に据えた理論も考える。２ファノ多様体の研究では曲面の双有理幾何が必要だったように、高次元のトーリック森理論も考察しなければならないので、それについての研究も並行して行う。

(8) その他、トーリック多様体に関する研究。上記トーリック・２ファノ多様体等の研究に関連して、通常のトーリック森理論、通常のトーリック・ファノ多様体、変形理論等の研究の発展を目指すことも重要であり、積極的に行っていく。

３．研究の方法

以下のような手法を用いて、本研究を進めていく。

(1) 先行研究によって、滑らかな射影的トーリック多様体上の中間次元のサイクルをある種の多項式で表現する方法が本研究には有益であることがわかっている。そのような表現方法は未だ不完全であるので、更に理論を進めて研究し、トーリック・２ファノ多様体等の研究に応用する。

(2) 通常のトーリック森理論、変形理論等も勿論本研究にとって強力な武器である。トーリック・２ファノ多様体等に対して、最初に森コーンの端射線を観察する、というのは常套手段である。また、一般的な研究を始める前に、森コーンに関する条件や、扇に関する条件を幾つか仮定して、ある程度の性質を予想しつつ研究を進めていく。

(3) 滑らかなトーリック・ファノ多様体については、低次元の分類、ピカール数を固定しての分類、対称的な場合の分類、ある種の収縮写像を持つ場合の分類等、様々な分類表が得られている。それらを用いて計算を行い、実験的な考察も行う。扇や多面体の計算はコンピュータとの相性も良いので、コンピュータでの計算も積極的に行っていく。

４．研究成果

主な研究結果は以下の通りである。以下のリストの中には、現在論文執筆中、及び研究継続中のものもある。

(1) 先行研究で導入した、滑らかなトーリック多様体上の２サイクルを、多項式を用いて表す方法を更に深化させた。具体的には、概念の定義を一般的にし、簡単なトーラス不変な有理曲面の場合には、それらに含まれる有理曲線に付随する一次多項式から計算出来ることを示した。それらはいわゆる壁関係式と本質的には同じものであり、扇の情報から簡単に求めることが出来る。この性質はおそらく偶然のものではなく、一般的に証明出来そうな気配があるが、現状ではまだ成功していない。トーラス不変な有理曲面が同変ブロー・アップ、同変ブロー・ダウンで繋がる場合についても計算公式を得ており、これについては現在論文執筆中である。最後の結果は強力な武器であり、例えば、ピカール数が高い場合のトーリック多様体の２ファノ性の判定等が以前よりかなり簡単に出来るようになった。今後の研究への応用が期待される。

(2) (1) で述べたことの高次サイクルへの拡張であるが、有理曲面とは限らない高次元のトーラス不変な部分多様体の場合についても、同様の多項式に関する結果を得た。この場合はサイクルの次元次数の斉次多項式となる。特に高次サイクルのピカール数が２の場合については明白に計算出来ることを示した。２サイクルの場合と同様な性質があるのかどうかは、今後の重要な研究課題の一つである。

(3) ４次元以下について、滑らかなトーリック・弱２ファノ多様体を完全に分類した。この場合の分類方法は、単に滑らかなトーリック・ファノ多様体の分類表をチェック、計算しただけではなく、上記の手法を用いてある程度一般への応用も見込める形で分類した。５次元以上の分類については、やはり今後の重要な課題の一つである。

(4) 特殊な条件の元での滑らかなトーリック・弱２ファノ多様体の分類。分類と言うよりは、ある条件を課したときの非存在性を証明したものであるが、ファノ収縮写像、因子収縮写像を持つ場合等について、これを示した。トーリックとは限らない、一般の弱２ファノ多様体の場合への良い指標になるのではないかと思われる。

(5) ファノという条件を外し、射影的なトーリック多様体であり、第二チャーン指標が非負であるようなものについての研究を行った。具体的には、ファノ収縮写像を持つ場合のそのようなトーリック多様体の幾何的構造の決定や、ピカール数が小さい場合の幾何的構造の決定である。これらの結果は、高次サイクルに対してもある程度同様のことが成立するのではないかと思われており、実際、ピカール数が小さい場合には同様の分類結果を得た。

(6) 高次元のトーリック・弱化ファノ多様体の研究。これについては本論から多少離れるが、将来的には変形理論も視野にいれて本研究を行うのが目的であるので重要である。弱化ファノ多様体については、３次元までの研究しか存在していないが、４次元以上に対しても同様の概念を定義し、トーリック多様体については、３次元と同様の、弱化ファノ多様体になるための十分条件が存在することを示した。その際、先行研究で構築した、完備トーリック多様体からなる変形族の拡張が必要であり、若干の結果を得た。更なる一般化も見込める感触があり、現在研究中である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

(1) H. Sato, トーリック・ファノ多様体の第二チャーン指標（査読なし), 福岡大学微分幾何研究集会報告集 21 (2015), 1-9.
(2) H. Sato, トーリック・ファノ多様体の第二チャーン指標（査読なし), 数理解析研究所講究録 1897 (2014), 111-116.
(3) H. Sato, The numerical class of a surface on a toric manifold (査読あり), Int. J. Math. Math. Sci. 2012 (2012), 9pages. DOI: 10.1155/2012/536475

〔学会発表〕（計　9　件）

(1) H. Sato, トーリック・ファノ多様体の変形，ワークショップ「Algebraic Geometry and Singularities」, 東京大学数理科学研究科, 2016 年 3 月 22 日.
(2) H. Sato, トーリック多様体のチャーン指標, 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2015」, 高知大学理学部, 2015 年 10 月 31 日-11 月 2 日.
(3) H. Sato, 第二チャーン指標が正のトーリック多様体, RIMS 研究集会「幾何学･組み合わせ論に現れる環と代数構造」, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 6 月 9 日-12 日.
(4) H.Sato, トーリック・ファノ多様体の第二チャーン指標, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2014 年 10 月 31 日-11 月 3 日.
(5) H. Sato, トーリック・ファノ多様体の第二チャーン指標, Fano 多様体の最近の進展, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 12 月 16 日-18 日.
(6) H. Sato, トーリック多様体の weak factorization theorem について, 杜の都代数幾何学研究集会, 東北大学大学院理学研究科, 2013 年 2 月 14 日-15 日.
(7) H. Sato, ファノ多面体の分類理論 (I), (II) (二回連続講演), 研究集会「学習理論における組合せ論」, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2012 年 9 月 18 日-20 日.
(8) H. Sato, Toric manifolds whose Chern characters are non-negative, Toric Topology and Automorphic Functions, Pacific Natonal Univ., 2011 年 9 月 5 日-10 日.
(9) H. Sato, On the classification of toric 2-Fano manifolds, 特異点とその広がり, 京都大学理学部, 2011 年 8 月 22 日-26 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

佐藤　拓（Sato Hiroshi）
福岡大学・理学部・准教授
研究者番号：20433310