

平成 26 年 6 月 12 日現在

機関番号：11401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540067

研究課題名(和文)ポアソン幾何におけるコホモロジー群の研究

研究課題名(英文)Studies of cohomology groups in Poisson geometry

研究代表者

三上 健太郎(MIKAMI, KENTARO)

秋田大学・工学(系)研究科(研究院)・名誉教授

研究者番号：70006592

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：2n次元斜交ベクトル空間の形式的ハミルトン・ベクトル場の成すリー環の相対ゲルファント・フックス・コホモロジー群について研究し以下の結果を得ました。1)2次元の場合、重さ20まで調べました。2)4次元の場合、Littlewood-Richardson 規則を利用し、重さ6まで調べました(J.Math.Sci.Univ.Tokyo 9(2012)1-18)。3)6次元の場合に、結晶基底理論を使って重さ6までを調べました(arXiv:1402.6834)。4)2次元の場合、目時類に関する、2つの部分リー環の相対コホモロジー群についての森田茂之氏等の予想に肯定的な証明を与え投稿中です。

研究成果の概要(英文)：I studied about  $Sp(2n)$  relative Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of the formal Hamiltonian vector fields on the  $2n$ -dimensional symplectic vector space and got the results below. 1) In 2-dim case, we determined the GKF cohomology groups for weight 20. 2) In the case of 4-dim, using Littlewood-Richardson rule, we determined the GKF cohomology groups for weight 2, 4 and 6. This was published in J.Math.Sci.Univ.Tokyo 19(2012)1-18, by the title Lower weight Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of the formal Hamiltonian vector fields on  $R^4$ . 3) By using crystal base theory, in 6-dimensional case, we studied the GKF cohomology groups for weight 2, 4 and 6. The result is uploaded on <http://arxiv.org> by the title relative Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of the formal Hamiltonian vector fields on 6-dimensional plane, arXiv:1402.6834. 4) I gave an affirmative answer to a conjecture, and submitted to some Journal by the title, "An affirmative answer to a conjecture for Metoki class".

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：シンプレクティック幾何学

キーワード：ポアソン構造 シンプレクティック構造 形式的ハミルトン・ベクトル場 運動量写像 ゲルファント・フックス・コホモロジー群 既約分解 結晶基底(Crystal Basis) グレブナー基底(Groebner Basis)

### 1. 研究開始当初の背景

1970年代に無限次元リー環のコホモロジー群の研究がゲルファント等によって行われた。特に  $2n$  次元シンプレクティックベクトル空間の形式的ハミルトンベクトル場の成すリー環 ( $\text{ham}_{2n}$  と記す) の  $\text{Sp}(2n)$ -相対コホモロジー群,  $H^m(\text{ham}_{2n}, \text{Sp}(2n))_w$  について,  $n=1$ , 次数  $m=7$ , ウェイト  $w=8$  の時非自明 (ベッチ数 1) であることが Gel'fand, Kalinin and Fuks により The cohomology of the Lie algebra of Hamiltonian formal vector fields, 1972 に示された。  $n=1$ , 次数  $m=9$ , ウェイト  $w=14$  の時非自明 (ベッチ数 1) であることが S. Metoki により Non-trivial cohomology classes of Lie algebras of volume preserving formal vector fields, 2000 に発表された。

原点での値がゼロになる  $\text{ham}_{2n}$  の部分リー環を記号  $\text{ham}_2^0$  で表し, その次数  $m$ , ウェイト  $w$  の  $\text{Sp}(2n)$ -相対コホモロジー群を, 記号  $H^m(\text{ham}_2^0, \text{Sp}(2n))_w$  で表す時, 森田茂之氏らは, D. Kotschick and S. Morita, The Gel'fand-Kalinin-Fuks class and characteristic classes of transversely symplectic foliations, arXiv:0910.3414 (October 2009) において, その群について  $n=1$   $w \leq 10$  の場合を決定した。

上記 D. Kotschick and S. Morita 論文に刺激され, 三上・中江・児玉は Higher weight Gel'fand-Kalinin-Fuks classes of formal Hamiltonian vector fields of symplectic  $\mathbb{R}^2$ , arXiv:1210.1662, October 2012 by K. Mikami, Y. Nakae and H. Kodama において,  $n=1$ ,  $w < 20$  の場合  $H^m(\text{ham}_2^0, \text{Sp}(2n))_w$  を全て決定すると共に,  $n=1$  かつ  $w \leq 50$  の時, オイラー特性数を求めた。

$n=1$  の時の Clebsch-Gordan rule に対応して,  $n=2$  の場合 Littlewood-Richardson rule を利用する必要があり, 活用の術と手応えを予備研究で得ています。

### 2. 研究の目的

研究開始当初の背景で使った 2 種類の相対ゲルファントフックスコホモロジー群の記号  $H^m(\text{ham}_{2n}, \text{Sp}(2n))_w$ ,  $H^m(\text{ham}_2^0, \text{Sp}(2n))_w$  を使い, 以下本研究の目的を箇条書きします。

[1] D. Kotschick and S. Morita, The Gel'fand-Kalinin-Fuks class and characteristic classes of transversely symplectic foliations, arXiv:0910.3414 (October 2009) において, シンプレクティック 2 次形式 を介して,  $H^5(\text{ham}_2^0, \text{Sp}(2))_{10}$  から  $H^7(\text{ham}_2, \text{Sp}(2))_8$  が同型写像であることを示し, 目時類が住む  $H^9(\text{ham}_2, \text{Sp}(2))_{14}$  に関し,  $H^7(\text{ham}_2^0, \text{Sp}(2))_{16}$  から  $H^9(\text{ham}_2, \text{Sp}(2))_{14}$  が同型写像であろうと予想した。この予想に取り組みました。

[2] 相対ゲルファントフックスコホモロジー群  $H^m(\text{ham}_2^0, \text{Sp}(2n))_w$  に関し

[2-1]  $n=1$  の場合,  $w \geq 20$  についてベッチ数の情報を得たい。

[2-2]  $n=2$  の場合, Littlewood-Richardson rule を手掛かりに, 相対ゲルファントフックスコホモロジー群  $H^m(\text{ham}_4^0, \text{Sp}(4))_w$  を研究する。

[2-3]  $n \geq 3$  の場合, 相対ゲルファントフックスコホモロジー群  $H^m(\text{ham}_{2n}^0, \text{Sp}(2n))_w$  の実用研究の可能性を探る事です。

### 3. 研究の方法

本研究の目的 [1] に取り組むには, 基本的に余鎖複体 (cochain complex) の次元とそれらの間をつなぐ余境界作用素の階数を求める事である。それには線形代数学の成果を利用するのが一般的であるが, 本研究ではグレブナー基底 (Groebner Basis) 理論を活用して, 計算の高速化と非自明な解の表示の曖昧さを抑制しました。そして, [1] での D. Kotschick-S. Morita 予想に肯定的な証明を与えました。また, 予想の元になった D. Kotschick-S. Morita の定理に, グレブナー基底理論を使った別証明を与える事が出

来ました。

グレブナー基底理論を使うことによって計算効率・計算速度が良くなり研究の目的 [2-1] について、ウエイト 20 の計算が完了し、全てのベッチ数がゼロであるとの結果を得ました。

$Sp(2n)$  表現の既約表現同士のテンソル積の既約分解は、 $n=1$  なら Clebsch-Gordan rule,  $n \geq 2$  なら Littlewood-Richardson rule +specialization algorithm が必要です。一方、柏原氏らの crystal base theory は、一方の crystal base が得られると、テンソル積の既約分解が極めて簡潔な組合せ手順で入手出来ることを保証する理論です。

$n$  を指定し、長さ(深さ)  $n$  以下のヤング図形を与えた時、対応する既約表現空間  $V$  の crystal base を得る数式処理プログラムを自前で作成しました。

$n = 2$  の場合、我々の仕事 Lower weight Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of the formal Hamiltonian vector fields on  $R^4$ , J.Math.Sci.Univ.Tokyo, 19 (2012,1-18) に現れたテンソル積についてリトルウッド・リチャードソン規則で得た分解とクリスタルベース理論を使った分解が完全に一致する事を確認しています。

本研究を推進するために大量計算には数式処理ソフト Maple を使い、適宜バンドルされているパッケージ(例えばグレブナー基底のパッケージ等)を活用します。得られた結果が特定のソフトウェアに依存しない事を確かめるべく他の数式処理ソフトによる検証を行いました。採用した数式処理ソフトウェアはフリーである事と日本の数学研究者には極馴染みがあるとの理由で Risa/Asir です。

#### 4. 研究成果

研究の目的 [1] に関しては、「接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺」研究集会で「Conjecture about Metoki class」なる

タイトルで、2013年1月29日(秋田カレッジプラザ)での招待講演、「慶應義塾大学幾何セミナー」では「Morita conjecture about Metoki class」なるタイトルで、2013年3月9日(慶應大学矢上キャンパス)に招待講演を行いました。それらを踏まえて、An affirmative answer to a conjecture for Metoki class なるタイトルで投稿中です。ゲルファント・フックス類に関する D.Kotschick-S.Morita の定理にグレブナー基底を使った別証明を与え、<http://www.math.akita-u.ac.jp/~mikami/Conj4MetokiClass/> に公開しています。

[2] 相対ゲルファントフックスコホモロジー群  $H^m(\text{ham}_{2n}^0, Sp(2n))_w$  に関し [2-1]  $n=1$  の場合、グレブナー基底を用いた事と計算方法の根本的な見直しを実施し、 $w=20$  について、全てのベッチ数がゼロであるとの結果を得、Higher weight Gel'fand-Kalinin-Fuks classes of formal Hamiltonian vector fields of symplectic  $R^2$ , arXiv:1210.1662v2, February 2014 by K.Mikami, Y.Nakae and H.Kodama として <http://arxiv.org> に再上奏しました。

[2-2] 相対ゲルファントフックスコホモロジー群  $H^m(\text{ham}_4^0, Sp(4))_w$  の研究に関しては、2011年12月15日 Exchange Program of Japan and Belgium by JSPS (Universite Catholique de Louvain) での招待講演(Gel'fand-Fuks cohomology groups of Hamiltonian vector fields), 2012年11月1日 Foliations and Diffeomorphism Groups 2012 (東京大学玉原国際セミナーハウス)での招待講演(Lower weight Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of the formal Hamiltonian vector fields on  $R^4$ ) そして、査読を経て、Lower weight Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of the formal Hamiltonian vector fields on  $R^4$  として J. Math. Sci. Univ.

Tokyo, vol(19) 2012 (1-18) に掲載されました。

[2-3]  $n=3$  の場合の相対ゲルファントフックスコホモロジー群  $H^m(\text{ham}_6^0, \text{Sp}(6))_w$  の研究に関しては, Lower weight Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of formal Hamiltonian vector fields on 6-dimensional plane, K.Mikami, arXiv:1402.6834 (February 2014) を <http://arxiv.org> に上奏してあります。現在投稿準備中です。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 1 件)

K.Mikami and Y.Nakae, Lower weight Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of the formal Hamiltonian vector fields on  $R^4$ , J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 査読有, 19, 2012, 1-18

〔学会発表〕(計 4 件)

(1)K.Mikami, Morita conjecture about Metoki class, 「慶應義塾大学幾何セミナー」2013年3月9日 at 慶應義塾大学矢上キャンパス

(2)K.Mikami, Conjecture about Metoki class, 「接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺」研究集会, 2013年1月29日 at 秋田カレッジプラザ

(3)K.Mikami, Lower weight Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of the formal Hamiltonian vector fields on  $R^4$ , Foliations and Diffeomorphism Groups 2012, 2012年11月1日 at 東京大学玉原国際セミナーハウス

(4)K.Mikami, Gel'fand-Fuks cohomology groups of Hamiltonian vector fields, Exchange Program of Japan and Belgium by JSPS, 2011年12月15日 at Universite Catholique de Louvain (Belgium)

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：

番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

(1)

<http://www.math.akita-u.ac.jp/~mikami/Conj4MetokiClass/>

(2)

[http://www.math.akita-u.ac.jp/~mikami/GKF\\_R6/](http://www.math.akita-u.ac.jp/~mikami/GKF_R6/)

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

三上健太郎 (MIKAMI, Kentaro)

秋田大学・工学資源学研究所・名誉教授  
研究者番号：70006592

(2)研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者

( )

研究者番号：