

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 9 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540071

研究課題名(和文)積分不可能平面場上の流れと葉層構造

研究課題名(英文)Flows and foliations subordinate to nonintegrable plane fields

研究代表者

稲葉 尚志 (Inaba, Takashi)

千葉大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：40125901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円、(間接経費) 750,000円

研究成果の概要(和文)：1. 積分不可能平面場では通常のエントロピーは全て消滅する(Zung2011). 本研究では微分可能性を考慮した新定義を提案した. 2. 積分不可能平面場に初期値に関する鋭敏依存性(SDIC)の概念を導入し, SDICを持つ点を許容する積分不可能平面場の候補を構成した. 3. 接触多様体において, 接触構造を変えず接触形式のみを変えて, Reeb流内に不変トーラス T を実現し, 更に T 上に様々な流れを実現した.

研究成果の概要(英文)：1. Usual entropy always vanishes for nonintegrable plane fields (Zung 2011). We proposed a new definition of entropy which is involved in differentiability.
2. We introduced the concept of sensitive dependence on initial conditions (SDIC) for nonintegrable plane fields and constructed a nontrivial candidate for SDIC.
3. Given a contact manifold M and a torus T with a nonsingular flow, we constructed a contact form on M which defines the given contact structure and admits T as an invariant set of the associated Reeb flow.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分トポロジー 積分不可能平面場 エントロピー

1. 研究開始当初の背景

積分不可能平面場の研究は、変分法を用いる方法あるいはリー環論を用いる方法が歴史的な主流であり、subriemann 幾何学や微分式系の理論の名を冠した Cartan や Tanaka 等の壮大な研究が既にある。然しながら、位相幾何学を使って多様体の大域的な位相構造との関係を追究する視点が注目されたのは比較的最近のことである。この視点は Bennequin に始まる 3 次元多様体上の接触構造における tight と overtwisted の位相的区別の発見が起点と言ってよいと思われる。接触構造以外では、この視点からの研究は、4 次元多様体上の Engel 構造に関して Gershkovich (1995) と Vogel (2009) が主なものとして挙げられる他は、本研究と同様の視点で研究を行っている研究者は本研究代表者の知る限り極めて僅かである。本研究代表者は Bull. Austral. Math. Soc. (2003) において 4 次元ユークリッド空間上の Engel 構造であって、付随する特性葉層がコンパクトな葉を許容するものを構成した。これは Gershkovich の提示した問題の解決である。また Foliations 2005, Proc. Int. Conf., Poland (2006) では、Engel 構造において、accessible set を完全に決定した。また、摂動を一切許さない自由ループを積分曲線として持つ積分不可能平面場の例を構成した。これらの結果は、積分不可能平面場の大域構造の理解という観点から見ると、まだ端緒を開いたと言う段階のものであり、現在の接触構造の理論に比することができるまでに達するには、解明すべきことが山積している。本研究代表者は長年にわたって葉層構造や力学系を研究してきた。それらの知識を積分不可能平面場上の力学系や葉層構造に存分に活用したいと考えた。

2. 研究の目的

次の 3 つを目標とした。1 つ目は積分不可能平面場に対するエントロピーの研究である。

平面場に対してエントロピーの概念を導入し、それらの複雑さを測ろうとすることは自然で有力であると思われる。実際、既に、葉層構造に対しては、Ghys-Langevin-Walczak (1988) により、力学系理論における位相エントロピーの概念の拡張がなされており、特に余次元 1 の場合には、弾性葉の存在がエントロピーの非自明性と同値であるという結果まで得られている。これに対し、積分不可能平面場に対しては定義の時点で難しさがあり、最近までエントロピーの概念は一切導入されていなかった。9 年前、Bis (2005) がようやくひとつの定義を提案した。計算したのは接触平面場のエントロピーの自明性のみであった。本研究では、エントロピーの新たな定義を提案しその有効性を示すことを目標とした。

2 つ目は積分不可能平面場の存在問題の研究である。よく知られているように、接触構造については、全ての向付可能 3 次元多様体上には接触構造が存在する (Martinet) が、tight 接触構造の存在問題は難解であり未だ未解決である。Engel 構造の存在問題については、Vogel (2009) が解決した。しかし、彼の構成した Engel 構造は或る意味で非常に overtwisted なものである。tight な Engel 構造の存在問題は、まだ全く始まっていない。本研究では、これを開始することを目標とした。

3 つ目は積分不可能平面場上の流れ及び葉層構造の性質の研究である。軌道や葉が平面場に接している流れや葉層構造、或いは軌道や葉が平面場に横断的な流れや葉層構造を考察することで平面場の構造を解明したいと考えた。例えば接する場合について言えば、接触構造の場合は、Legendre 流れや Legendre 葉層であるが、これまで Legendre 結び目の研究は数多いが Legendre 流れの研究は少ない。本研究ではこれらの研究課題について

様々な角度から大域的な考察を行いたいと考えた。

3. 研究の方法

新しい研究情報の獲得や関係研究者との研究連絡のため幾つかの国内研究集会に参加した。連携研究者との討議も大いに役立った。また、関連課題の研究者であるポーランドの Walczak とも研究連絡を行なった。

4. 研究成果

研究目的に挙げた3つの目標の進展状況は次の様であった。まず、1つ目については、新エントロピーの定義は確立できたがその非自明性を与える例の提示にまでは至ることができなかった。その代わりに、研究方向を柔軟化し、エントロピーに関連した力学系理論の重要概念の導入可能性について考察してみることの思いついた。着目したのは初期値に関する鋭敏依存性であり、これに関して考察を進めた。2つ目についてはそれ程の進展を得ることができなかった。3つ目に関しては、接触構造のReeb流れについて一定の結果を得た。また、関連する研究として群作用の力学系的考察を行い、得られた結果を学術論文として出版した。

以下、成果の詳細を記述する。

(1) 積分不可能平面場に対するエントロピーの新定義について。2005年のBisの試みのあと、2011年にZungが更なる試みを展開したが、多様体の位相や距離の範疇で定義をしていたため、結局、すべてが自明という結論に終わった。本研究では微分可能性を定義中に組み込んだ新定義を提案した(23、24年度)。残念乍ら、この新定義の非自明性は研究期間内に示すことができなかった。しかし、或る条件下での自明性は証明できた。即ち、一般に、 D がブラケット生成的平面場であって、 D に横断的な D -保存ベクトル場をある条件を満たす程度に多数許容するならば、 D のエントロピーは消滅することを示した。この消

滅定理の証明には D -保存ベクトル場の存在が不可欠であるため、 D -保存ベクトル場を許容していない平面場には適用できない。そこで、 D -保存ベクトル場の存在に頼らない消滅定理を得るために、水平曲線間の距離を定義する際、曲線の曲率の違いも考慮に入れた第2のエントロピーも導入した。このエントロピーについては次の(D -保存ベクトル場の存在に頼らない)消滅定理を得た。平面場 D が性質 N と性質 A を満たすならばこのエントロピーは消滅する。ここに性質 N とは水平曲線の到達可能集合が終点の近傍をなすことであり、性質 A とは到達可能集合の点へ至る摂動曲線が元の曲線と近い距離にとれることである。以上の結果は23年度秋に東京大学玉原国際セミナーハウスで開催された研究集会において発表した(学会発表)。非自明性が確立できたときに論文化する予定である。また、これらの研究の関連結果として、法方向に縮小するリー群作用の非存在に関する結果を得て、これは論文として出版した(雑誌論文)。

(2) エントロピーに関連する他の概念の積分不可能平面場への導入についても考察し、与えられた2点を水平曲線に沿って動かすときの挙動を見ることで力学系理論における初期値に関する鋭敏依存性(SDIC)の概念を積分不可能平面場に対して導入した(24、25年度)。どんな接触構造のどんな点もSDICを持たないことはわかる。一方、bracket生成的平面場でSDICを持つ点を許容するコンパクト多様体 M 上の積分不可能平面場の例を構成した。ただし、この M は境界付きであるところが不満である。境界なしの例に改良することが課題として残った。

(3) 接触多様体のReeb流れに関して Eliashberg-Hofer(2003)は3次元では局所的に有界な軌道は必ず周期軌道に漸近することを示したが、5次元以上では同様の結果は成り立たないことを Geiges - Rottgen - Zehmisch

(2013)が示した。本研究では彼らの構成を拡張し、局所的に接触形式のみを変えてReeb流が不変トーラスを持つようにするとき、そのトーラス上の流れの様子をある程度自由に变化させることができることを示した(25年度)。これはReeb流の挙動の解明に新知見を与えるものであると期待している。さらに踏み込んだ考察を加えたのちに完成論文にしたいと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Ken-ichi Sugiyama:

On a generalization of Deuring's results, Finite Fields and Their Applications, 26, (March 2014), 69-85.

DOI:10.1016/j.ffa.2013.11.004

査読有

Takashi Tsuboi:

Homeomorphism groups of commutator width one, Proceedings Amer. Math. Soc.

141 (2013), 1839--1847.

DOI: 10.1090/S0002-9939-2012-11595-3

査読有

Takashi Inaba, Shigenori Matsumoto and Yoshihiko Mitsumatsu:

Normally contracting Lie group actions, Topology and its Applications 159 (2012), 1334 - 1338 .

DOI:10.1016/j.topol.2011.12.012

査読有

Takashi Tsuboi:

On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional

manifolds, Commentarii Mathematici Helvetici, 87 (2012), 141--185.

DOI: 10.4171/CMH/251

査読有

Yoshihiro Ohta, Akinobu Nishiyama, Yoichiro Wada, Yijun Ruan, Tatsuhiko Kodama, Takashi Tsuboi, Tetsuji Tokihiro, and Sigeo Ihara:

Path-preference cellular-automaton model for traffic flow through transit points and its application to the transcription process in human cells, Physical Review E, 86 (2012), 021918.

DOI: 10.1103/PhysRevE.86.021918

査読有

Shigenori Matsumoto and Hiromichi Nakayama :

Continua as minimal sets of homeomorphisms of S^2 , L'Enseignement Mathématique (2), 57 (2011), 373-392.

DOI: 10.4171/LEM/57-3-5

査読有

[学会発表](計11件)

Ken-ichi Sugiyama:

On a generalization of Deuring's results, Low dimensional topology and number theory VI, 福岡ソフトリサーチパークセンター, 2014年3月20日

Takashi Tsuboi:

Several problems on groups of diffeomorphisms, Geometry and Foliations 2013 Komaba, Tokyo, September 11, 2013.

Takashi Tsuboi:

Homeomorphism groups of commutator width one, Seminar CalTech, December 17, 2012.

Takashi Tsuboi:

Homeomorphism groups of commutator width one, Geometry in Dynamics - Satellite Thematic Session, 6th European Congress of Mathematics, Krakow, July 1, 2012

Hirromichi Nakayama :

Smooth embedding of the minimal homeomorphism of Gottschalk and Hedlund, 国際研究集会「Foliations 2012」, Lodz, Poland, June 29, 2012

稲葉 尚志 :

An attempt to define entropy of plane fields, Plane Fields on Manifolds and Diffeomorphisms Groups 2011, 東京大学玉原国際セミナーハウス、2011年11月2日.

Hirromichi Nakayama :

Smooth embedding of the minimal homeomorphism of Gottschalk and Hedlund, Plane Fields on Manifolds and Diffeomorphisms Groups 2011, 東京大学玉原国際セミナーハウス、2011年11月2日.

Takashi Tsuboi:

Homeomorphism groups of commutator width one, Plane Fields on Manifolds and Diffeomorphisms Groups 2011, 東京大学玉原国際セミナーハウス、2011年10月31日.

Takashi Tsuboi:

Homeomorphism groups of commutator width one, Poster at Geometry and Dynamics, Today Forum, 'Ecole Normale Sup'erieure de Lyon, 2011年10月17日.

坪井 俊:

微分同相群の交換子長, 交換子長1の群, 仙台シンポジウム, 2011年8月3日, 4日.

坪井 俊:

完全な群をご存知ですか, 中央大学理工学部数学科談話会。2011年7月11日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

稲葉 尚志 (INABA Takashi)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 40125901

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

坪井 俊 (TSUBOI Takashi)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 40114566

中山 裕道 (NAKAYAMA Hirromichi)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号: 30227970

久我 健一 (KUGA Ken'ichi)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 30186374

杉山 健一 (SUGIYAMA Ken-ichi)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 90206441