様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月 15 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2016
課題番号：２３５４００７２

研究課題名（和文）シンプレクティック多様体への群作用と量子化

研究課題名（英文）Group actions on symplectic manifolds and their quantization

研究代表者
今野　宏（Hiroshi, Konno）

明治大学・理工学部・専任教授

研究者番号：２０２５４１３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）： シンプレクティック多様体にリー群が作用すると，多くの場合にモーメント写像が存在する．本研究課題では，モーメント写像の幾何学の新しい方向への応用を行った．まず，幾何学的量子化は偏極の選び方はよらないという物理学における原理が成り立つ理由を数学的に説明する試みとして，旗多様体のケーラー偏極と実偏極の関係を調べた．次に，カラビヤウ多様体におけるラグランジュ平均曲率流の特異点を許す時間大域解のさまざまな具体例を構成して，その特異点の構造を調べた．

研究成果の概要（英文）： A moment map is defined when a Lie group acts on a symplectic manifold with certain conditions. In this project, we gave new applications of the geometry of moment maps. Firstly, we studied geometric quantization to clarify a mathematical reason for the polarization-independent principles in physics. In particular, we described the relation among Kahler polarizations and real polarizations on flag manifolds. Secondly, we construct various concrete examples of Lagrangian mean curvature flows in Calabi-Yau manifolds. We also described the structure of the singularities of these flows.

研究分野：differential geometry

キーワード：moment map　geometric quantization　mean curvature flow

１．研究開始当初の背景

(1)　幾何学的量子化

幾何学的量子化とは，シンプレクティック多様体を古典力学の相空間とみなすとき，そのシンプレクティック多様体から，幾何学的に量子ヒルベルト空間などの量子系を構成する方法である．幾何学的量子化をする際には，偏極と呼ばれるシンプレクティック多様体の接束（またはその複素化）のある性質をもつラグランジュ部分束を付加的に定める必要がある．このとき，量子ヒルベルト空間は，シンプレクティック多様体上の前量子直線束と呼ばれる直線束の，偏極方向への共変微分が０となる切断全体のなす空間として，原則的には実現される．

偏極の代表的な例として，ケーラー偏極がある．ケーラー偏極はシンプレクティック構造と整合的な複素構造から定まり，前量子直線束の正則構造を誘導する．このとき，量子ヒルベルト空間は，前量子直線束の正則切断の空間となる．もうひとつの偏極の代表的な例として，実偏極がある．実偏極はシンプレクティック多様体のラグランジュファイブレーションから定まり，量子ヒルベルト空間の基底は，Bohr - Sommerfeld ファイバーと呼ばれる特別なファイバーと対応している．

ところで，どのような偏極を用いても，幾何学的量子化を実行した結果は同じになる，という物理からの指導原理がある．実際，ケーラー偏極と実偏極はまったく異なるものであるが，トーリック多様体や旗多様体の場合に，これら２種類の偏極により得られた量子ヒルベルト空間の次元が等しいことが，両者の次元をそれぞれ計算することにより確かめられている．

この物理学における指導原理が成り立つ理由を数学的に説明することが問題となる．この試みとして，T.Baier, C.Florentino, J.M.Mourao and J.P.Nunes は，トーリック多様体の場合に，トーラス作用から定まる実偏極に「収束する」ケーラー偏極の１パラメーター族を構成することにより，この理由を説明した．

(2) 平均曲率流

平均曲率流とは，リーマン多様体において，部分多様体を，その体積が最も効率よく減少する方向に変形することにより得られる，部分多様体の変形族である．その研究は 1970 年代後半から始められ，さまざまな重要な結果が知られているが，大部分はユークリッド空間内の超曲面に対するものである．一般に余次元の高い部分多様体に関する平均曲率流は，技術的困難があるため，あまり多くのことはわかっていない．

一方，カラビ－ヤウ多様体内のラグランジュ部分多様体という性質は，平均曲率流で保たれることが知られている．そのため，ラグランジュ平均曲率流がカラビ－ヤウ多様体の研究に役立つことが期待されている．1996 年にミラー対称性の視点から，カラビ－ヤウ多様体の特殊ラグランジュ部分多様体という極小部分多様体が注目され，2002 年に Thomas-Yau によりラグランジュ平均曲率流の時間大域解の存在と特殊ラグランジュ多様体との関係についてある予想がなされた．これらを契機として，ラグランジュ平均曲率流が研究されるようになった. Smoczyk, Wang はある特別な場合にラグランジュ平均曲率流の時間大域解の存在を示した．Chen-Li, Neves はラグランジュ平均曲率流の特異点について調べた．Anciaux, Lee-Wang, Joyce-Lee-Tsui はユークリッド空間内におけるラグランジュ平均曲率流の自己縮小解，自己拡大解と呼ばれるソリトン解の具体例を構成した．また，Castro-Lerma, Joyce-Lee-Tsui はユークリッド空間内におけるラグランジュ平均曲率流の平行移動解と呼ばれるソリトン解の具体例を構成した．二年前，Yamamoto は，Anciaux，Lee-Wang の構成方法をトーリック幾何の視点から整理して，この構成法をトーリック カラビ－ヤウ多様体における「一般化された」ラグランジュ平均曲率流の具体例を構成した．ただし，トーリック カラビ－ヤウ多様体の計量はリッチ平坦と限らず，「一般化された」ラグランジュ平均曲率流は平均曲率流とは異なり，平均曲率流と似た性質をもつと期待されるものの，どの程度似ているかも十分に調べられていない．

２．研究の目的

(1)　実偏極とケーラー偏極はまったく異なるものであるが，それぞれの偏極を用いて幾何学的量子化を実行した結果は同じになる，という物理学における指導原理が成り立つ理由を数学的に説明する．そのために，実偏極を退化したケーラー偏極としてみなせることを示すことにより，実偏極とケーラー偏極とを関連付け，上述の指導原理を説明すること目的となる．

(2)　現時点では，ラグランジュ平均曲率流に関して知られていることはあまり多くない．ラグランジュ平均曲率流の一般論を構築するには時期尚早で，ラグランジュ平均曲率流の具体例を数多く構成して，その特異点の様子など，ラグランジュ平均曲率流において生じるさまざまな現象を観察することが目的となる．

３．研究の方法

(1) T.Baier, C.Florentino, J.M.Mourao and J.P.Nunes は，トーリック多様体の場合に，トーラス作用から定まる実偏極に「収束する」ケーラー偏極の１パラメーター族を構成することにより，上述の指導原理が成り立つ理由を説明した．その構成は，トーリック多様体のシンプレクティックポテンシャルという，トーリック多様体特有の幾何を基礎とする方法を用いて行われた．目標は，トーリック多様体でないシンプレクティック多様体に対して，Baier らの方法を拡張することである．基本的な方針は，シンプレクティック多様体をトーリック多様体に退化させることと，Baier らによるトーリック多様体の方法を組み合わせることである．このふたつを組み合わせるとき生じる技術的困難を乗り越えることが具体的問題となる．

(2) Yamamoto のトーリック カラビ―ヤウ多様体における「一般化された」ラグランジュ平均曲率流の具体例を構成方法は，トーリック幾何をいたるところで用いている．したがって，この方法を可換リー群の作用をもつ一般のカラビ―ヤウ多様体に拡張し，(「一般化されていない」真の）ラグランジュ平均曲率流を得るためには，Yamamoto の構成からトーリック幾何を切り離し，カラビ―ヤウ多様体の幾何の枠組みの中で構成法を再構築する必要がある．さらに，こうして得られた平均曲率流の具体例は特異点をもつが，その特異点を解析する方法を構築する必要がある．

４．研究成果

(1) Mark D. Hamilton 氏と共同で，旗多様体という具体的な場合に上記の問題を解決した．すなわち，旗多様体の標準的なケーラー偏極を変形して Gelfand - Cetlin 系と呼ばれるラグランジュファイブレーションの定める実偏極に量子レベルで収束するケーラー偏極の１パラメーター族を構成した．すなわち，各ケーラー偏極に応じて定まる前量子直線束の正則切断の１パラメーター族が，Gelfand - Cetlin 系の定める実偏極に関する Bohr - Sommerfeld ファイバーに台を持つデルタ関数的な切断に収束してゆくことを示した．具体的には，Kogan-Miller，西納―野原―上田により与えられた旗多様体のトーリック退化と，Baier らによるトーリック多様体の変形の方法を組み合わせることに成功した．組み合わせを実行するために，トーリック退化の理論をシンプレクティック構造を保ったまま行うように理論を再構築すること，Baier らの理論の枠組みを特異点を持った部分多様体の変形に拡張すること，組み合わせるときに生じる誤差項の精密な評価をすること，などを実行した．本研究は本科研費による研究期間前から継続して行われた．研究期間前には問題解決の方針は定まっていたが，証明の詳細を完成させるのに本研究期間を費やした．論文投稿後も査読者からの多くの指摘に答えるために多くの時間と労力を費やした．最終的に論文を出版することができ，本研究を終えることができた．

(2) 可換リー群がハミルトン的にカラビ―ヤウ多様体に作用しているとする，さらに，各点で群作用の軌道に直交する特殊ラグランジュ部分多様体が存在すると仮定する．この仮定の下で,(「一般化されていない」真の）ラグランジュ平均曲率流の特異点を許す時間大域解を具体的に構成した．構成には，可換リー群の作用のモーメント写像の性質が本質的に用いられる．

この構成法を，複素ユークリッド空間の線形な U(1)作用に適用すると，Anciaux, Lee-Wang により与えられた自己縮小解，自己拡大解が得られる．また，この構成法を複素ユークリッド空間に R（実数に加法群の構造を入れたもの）が平行移動により作用する状況に適用すると，Castro-Lerma により得られた平行移動解の高次元への一般化が得られる．このように，以前から知られていた例，あるいはその一般化が統一的な手法で構成できるようになった．

また，この構成法を４次元リッチ平坦 ALE 空間に適用して，この空間内のラグランジュ平均曲率流の時間大域解を構成した．これは，研究代表者の知る限り，非平坦なリッチ平坦多様体におけるラグランジュ平均曲率流の具体的に記述することのできる初めての例である．このラグランジュ平均曲率流は，有限回，特異点を生じるが，特異点の周りをスケール変換して現れる自己縮小解の構造を完全に決定した．この特異点解析においても，モーメント写像の性質が本質的に用いられる．

以上の結果は論文「Lagrangian Mean Curvature Flows and Moment Maps」としてまとめて，学術雑誌に投稿中である．また，arXive:1703.00090 として公表している．論文の公表後，Joyce から，「各点で群作用の軌道に直交する特殊ラグランジュ多様体が存在する」という仮定は，Joyce が特殊ラグランジュ部分多様体を構成する際に用いた仮定と同じであることが指摘を受けた．これにより，本研究課題で得られた結果は，この Joyce の結果を含み，その自然な拡張として位置付けられることが分かった．

(3) 東京大学出版会から「微分幾何学」（単著，277 ページ）を出版した．今までの研究を通して得られた知見などを社会に還元す

るという願いをこめて執筆した．

また，名古屋大学（2013年10月），首都大学東京（2015年1月），東京工業大学（2017年1月）において，集中講義を行う機会をいただき，今までの研究を通して得られた知見などを伝えることができた．

2012年に，二木昭人氏，金井雅彦氏と共同で幾何コロキウム（計８回）を主催した．

社会に数学を広める活動として，以下のような講演，記事の執筆を行った．
「ユークリッド空間から解き放たれて」 公開講座「空間へのアプローチ」(2012年11月24日，東京大学大学院数理科学研究科（東京都・目黒区））における講演
「リーマンと幾何学―現代の幾何，相対性理論へ」 数理科学 No.627 特集「リーマン―その多様な業績に迫る」サイエンス社，p.44-50，平成27年9月
「解析力学からシンプレクティック幾何へ」数理科学 No.612 特集「数学と物理における空間概念」サイエンス社，p.29-36，平成26年6月

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）
① M.Hamilton, H.Konno Convergense of Kahler to real polarizations on flag manifolds via toric degenerations, Journal of Symplectic Geometry, 査読有, vol.12, 2014, 473-509, http://dx.doi.org/10.4310/JSG.2014.v12.n3.a3

〔学会発表〕（計　13　件）
① 今野宏 Examples of Lagrangian mean curvature flows via moment maps,「複素幾何と幾何解析」，2017年3月15日，明治大学駿河台キャンパス（東京都・千代田区）
② H.Konno Kahler vs real polarizations, Koriyama Geometry and Physics Days 2017 "Geometric Quantization and related topics", 2017年2月13日，日本大学工学部（福島県・郡山市）
③ 今野宏 モーメント写像とラグランジュ平均曲率流，東京工業大学談話会，2017年1月18日，東京工業大学大岡山キャンパス（東京都・目黒区）
④ H.Konno Examples of Lagrangian mean curvature flows via abelian group actions, 第２２回複素幾何シンポジウム，2016年11月2日，金沢県政記念しいのき迎賓館（石川県・金沢市）
⑤ 今野宏 Examples of Lagrangian mean curvature flows via abelian group actions, 神楽坂幾何学セミナー，2016年10月15日，東京理科大学神楽坂校舎（東京都・新宿区）
⑥ 今野宏 Examples of Lagrangian mean curvature flows via abelian group actions, 微分幾何・トポロジーセミナー，2016年10月3日，慶應義塾大学矢上キャンパス（神奈川県・横浜市）
⑦ 今野宏 Examples of Lagrangian mean curvature flows via torus actions 日本数学会秋季総合分科会　2016年9月15日 関西大学千里山キャンパス（大阪府・吹田市）
⑧ 今野宏 旗多様体への実偏極への収束，リー群論表現論セミナー，2012年11月27日，東京大学駒場キャンパス（東京都・目黒区）
⑨ 今野宏 旗多様体のトーリック退化と幾何学的量子化，2012年11月10日，東京理科大学神楽坂キャンパス（東京都・新宿区）
⑩ H.Konno Convergence of Kahler to real polarizations on flag varieties, 2012年1月14日，The seven-th Japan-China conference on differential Geometry, ホテルレジーナ河口湖（山梨県・富士吉田市）
⑪ H.Konno Convergence of Kahler to real polarizations on flag manifolds, 2011年11月14日，香港中文大学 IMS Geometry Seminar，香港（中国）
⑫ H.Konno Geometry and topology of hyperkahler quotients, 2011年10月12,13,14,17日（連続講演），中国科学技術大学数学科学院幾何学セミナー，合肥（中国）
⑬ H.Konno Convergence of Kahler to real polarizations on flag manifolds, 2011年11月14日，The Conference of Geometry and Quantization，天津（中国）

〔図書〕（計　1　件）
① 今野宏 東京大学出版会，微分幾何学，2013年，277頁

〔その他〕
ホームページ等
https://www.meiji.ac.jp/sst/grad/teacher/05/02/6t5h7p00000etqhi.html

６．研究組織

(1)研究代表者
今野　宏（KONNO Hiroshi）
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：２０２５４１３８

(2)研究分担者　　なし
(3)連携研究者　　なし