

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 30 日現在

機関番号：12604

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540074

研究課題名(和文) スtring絡み目の C_n コボルダント分類に関する研究研究課題名(英文) Study on the classification of string links up to C_n -concordance

研究代表者

安原 晃 (Akira, Yasuhara)

東京学芸大学・教育学部・教授

研究者番号：60256625

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)： m -String絡み目全体の集合 $SL(m)$ は、スタッキング積と呼ばれる演算の下で半群の構造を持つ。 $SL(m)$ をコボルダントと呼ばれる同値関係で割ると、この半群は群となる事が知られている。更に、可換群になるならば $m=1$ である(また、そのときに限る)事も知られている。本研究では、 $SL(m)$ に群構造を与える新たな同値関係(C_n -コボルダント)を考え、 C_n -コボルダント群が可換群になる為の必要十分条件を与えた。ここで、 C_n -コボルダントとは、コボルダントとHabiro氏の定義した C_n -同値を組み合わせ得られる同値関係である。

研究成果の概要(英文)：The set $SL(m)$ of m -string links has a monoid structure, given by the stacking product. When considered up to concordance, $SL(m)$ becomes a group, which is known to be abelian only if $m=1$. In this study, we consider a new equivalence relation which endows $SL(m)$ with a group structure, namely the C_n -concordance, which is generated by C_n -equivalence, which is introduced by Habiro, and concordance. We give a necessary and sufficient condition for a pair (m,n) that the C_n -concordant group of m -string links is abelian.

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：トポロジー

キーワード：String絡み目 C_n -move ミルナー不変量 コボルダント

1. 研究開始当初の背景

3次元空間内の有限個の単純閉曲線の集合を絡み目という。特に1成分の絡み目を結び目という。結び目理論とは、絡み目(結び目)を研究対象とする位相幾何学の1分野であり、絡み目をアンビエント・イソトピーと呼ばれる同値関係で分類する問題は結び目理論の起源から残っている大問題の1つである。

アンビエント・イソトピーとは、直感的には、2つの絡み目が空間内の「連続的」な変形(切らずに伸ばしたり縮めたりして)で移りあうとき、同じであるとする同値関係である。アンビエント・イソトピーによる完全分類を与えることは、雲を掴むような話である。従って、それよりも「粗い」同値関係を導入し、分類することが短期の研究目標としては現実的である。このような研究を着実に進めることで、この大問題の解決に到達できるであろう。

そこでアンビエント・イソトピーより粗い同値関係として、「 C_n -コボルダント」(n は自然数)を考え、この同値関係による分類問題を調べることにする。ここで、 C_n -コボルダントとは、Habiro [Claspers and finite type invariants of links. *Geometry & Topology* 4(2000), 1--83]によって定義された C_n -同値と、Fox と Milnor [Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots. *Osaka Journal of Mathematics* 3(1966) 257--267]により定義されたコボルダントという2つの同値関係を組み合わせたものである。 C_n 同値は有限型不変量と深い関係があることが知られており、有限型不変量に関心を持つ世界中の研究者によって研究されている。また、コボルダントは定義されてから、40年以上経過した今でも、解明されていない点が多く、結び目理論においては広く知られた最も重要な研究対象の1つである。

2. 研究の目的

ストリング絡み目の集合に対し、 C_n -コボルダントによる分類問題を研究する。ストリング絡み目の C_n -コボルダント分類を与えるためには、Habegger と Lin [The classification of links up to link-homotopy, *Journal of American Mathematical Society* 3(1990), 389--419]により定義された「ストリング絡み目」の C_n -コボルダント分類の考察が重要であることが、これまでの研究によりわかっている。

ストリング絡み目の C_n -コボルダント分類は、一般に n が大きくなるほど、分類が細くなり、問題が飛躍的に難しくなることも知

られている。研究代表者と Meilhan の共同研究 [Characterization of finite type string link invariants of degree <5 . *Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society* 148(2010), 439--472]によって、 n が6以下の場合は解決済みなので、ここでは、残りの分類を与えることを目標とする。 n が6以下の分類は、長さ $n+1$ 以下の Milnor 不変量で与えられる。従って、一般の場合でも C_n -コボルダント分類が、長さ $n+1$ 以下の Milnor 不変量で与えられるのではないかという推測から、次の予想を得る。

[予想]各成分が自明なストリング絡み目が C_n -コボルダント同値である為の必要十分条件は、長さ $n+1$ 以下の Milnor 不変量が一致することである。

ここで「各成分が自明」という条件は、主張を簡易化するための条件であり、本質的ではない。実際、予想が肯定的に解決できれば、この条件が無い場合の分類も得られる事がわかっている。また、Milnor 不変量 (Milnor の μ 不変量) とは、Milnor [Link groups, *Annals of Mathematics* 59(1954), 177--195] が定義した絡み目不変量を Habegger と Lin がストリング絡み目の不変量に定義しなおしたものであり、 m 成分ストリング絡み目の Milnor 不変量 $\mu(l)$ は m 以下の自然数を項にもつ有限数列 l に対応して定義される。特に、長さ k の数列 l に対応する Milnor 不変量 $\mu(l)$ を、長さ k の Milnor 不変量と呼ぶ。

上述の予想を肯定的に解決することが理想であるが、まずは未解決でかつ1番やさしいところから取り掛かる事にする。予想は2種類の変数を含んでいる。一方は、 C_n -コボルダントの「 n 」であり、他方はストリング絡み目の成分数(これを「 m 」とする)である。これまでの研究により、 $(m,n)=(1, \text{任意の } n)$ 、 $(m,6 \text{ 以下の } n)$ の場合は解決済みなので、これに続くのは $(m,n)=(2,7)$ の場合である。本研究では、 $m=2$ の場合に焦点を絞り、研究を進める。

3. 研究の方法

本研究は研究代表者が単独で行う。研究を行う上で、何人かの研究者と研究交流を図る予定であるが、彼らは研究協力者という位置づけではない。

数学の研究では「考える」ことが大部分を占める。数学における研究交流の意義は、異なる観点からの思考や新しい知識を得ることができることにある。

本研究では、国内外の研究者と交流をはかることにより、研究の進展をはかった。その為、

本研究における研究費の大部分は旅費として用いた。主な研究交流は以下のとおりである。

(1) フランスのグルノーブル第1大学のジャン・バプテスト・メイヨン氏を訪問し研究交流をはかった。メイヨン氏とは、ここ数年共同研究を続けており、これまでも幾つかの共著論文も執筆している。メイヨン氏はミルナー不変量やクラスパー理論に関する知識が豊富で、今回の研究の進展にもにも大いに役立った。

(2) アメリカのジョージ・ワシントン大学で開催された研究集会 Knots in Washington XXXIII および Knots in Washington XXXVI に参加し、研究成果の発表及び、参加者との研究交流を行った。

(3) シドニー大学のジョナサン・ヒルマン氏を訪問し研究交流をはかった。ヒルマン氏は、絡み目の研究の代数的側面に精通しており、ミルナー不変量に関しても詳しい。本研究において有益なアドバイスを頂いた。

(4) 大阪工業大学に訪問し、同大学の渋谷哲夫氏や塚本達也氏と絡み目の局所変形やミルナー不変量に関する研究に関して意見交換を行った。

4. 研究成果

研究目的にも記述した通り、2成分のストリング絡み目の C_n -コボルダント分類が本研究の目的であり、分類を与える手段としてミルナー不変量が強力な道具でなるということから、研究目的で挙げた予想を解くという形で研究を進めた。

残念ながら予想を完全に解決するには至らなかったが、以下で説明するように、それに代わる重要な結果を示すことに成功した。

ストリング絡み目の C_n -コボルダントによる同値類の集合はスタッキング積と呼ばれる演算の下で群(これを C_n -コボルダント群と呼ぶ)になることが知られている。この群が可換であるならば、 C_n -コボルダント類は有限型不変量と呼ばれるもので分類されることが今までの研究からわかる。更に、 C_n -コボルダント類が有限型不変量で分類される事がわかれば、上述の予想がほぼ正しい事もわかっている。従って、 C_n -コボルダント群が可換か否かを調べる事は本研究にとって非常に重要な課題である。

この可換性の問題に対し、以下で述べるように完全な解答を得る事ができた。

[定理] 2成分のストリング絡み目の C_n -コボルダント群が可換であるための必要十分条件は n が 8 以下である事である。

この定理により、次の系が得られる。

[系] n が 8 以下のとき、2成分のストリング絡み目が C_n -コボルダントである為の必要十分条件は、位数 7 以下の有限型コボルディズム不変量が一致する事である。

この結果は、 n が 8 以下の場合、2成分のストリング絡み目に対しては、予想がほぼ正しい事を意味する。

更に、一般の成分数の場合は次の命題を得た。

[命題] 成分数が 3 以上のストリング絡み目の C_n -コボルダント群が可換であるための必要十分条件は n が 2 以下である事である。

本研究によって C_n -コボルダント群の可換性の問題が完全に解決できた事の意義は大きく、今後の研究に大きく役立つものと信じる。研究目的で挙げた予想に関しては、解答を得るに至らなかったが、今後の課題として研究を続けていきたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Jean-Baptiste Meilhan and Akira Yasuhara, Abelian quotients of the string link monoid, Algebraic & Geometric Topology, 査読有, 14(2014) 1461-1488
DOI:10.2140/agt.2014.14.1461

Jean-Baptiste Meilhan, Eri Seida and Akira Yasuhara, Local moves for links with common sublinks, Topology and its Applications, 査読有, 160(2013) 836-843
DOI:10.1016/j.topol.2013.02.006

Jean-Baptiste Meilhan and Akira Yasuhara, Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial, Geometry & Topology, 査読有, 16(2012) 889-917
DOI:10.2140/gt.2012.16.889

Yasutaka Nakanishi, Tetsuo Shibuya, Tatsuya Tsukamoto and Akira Yasuhara, On non self local moves, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査

読有, 21 (2012) 1250055 1-9
DOI:10.1142/S0218216511010097

〔学会発表〕(計7件)

Akira Yasuhara, Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial, Low dimensional topology and number theory VI, 2014年3月21日, 福岡ソフトリサーチパークセンター

Akira Yasuhara, Ck-concordance group of n-string links, Friday Seminar on Knot Theory, 2013年11月22日, 大阪市立大学

安原 晃, 絡み目のミルナー不変量について, 香川セミナー(20周年記念), 2013年10月19日, 香川大学

安原 晃, 絡み目のミルナー不変量とHOMFLYPT多項式, 第60回トポロジーシンポジウム, 2013年8月7日, 大阪市立大学

Akira Yasuhara, Abelian quotients of the string link monoid, Knots in Washington XXXVI, 2013年5月5日, George Washington University, USA

安原 晃, 絡み目の自己局所変形について, Knots in East Osaka VI, 2013年2月23日, 大阪工業大学

Akira Yasuhara, Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial, Knots in Washington XXXIII, 2011年12月3日, George Washington University, USA

〔その他〕

ホームページ等
<http://www.u-gakugei.ac.jp/~yasuhara/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安原 晃 (YASUHARA AKIRA)
東京学芸大学・教育学部・教授
研究者番号: 60256625