

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 4 日現在

機関番号：12605

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540077

研究課題名(和文) 斎藤自由因子と一意化方程式の研究

研究課題名(英文) Study on Saito free divisors and uniformization equations

研究代表者

関口 次郎 (Sekiguchi, Jiro)

東京農工大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：30117717

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円、(間接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：主に3次元アフィン空間の斎藤自由因子に沿って特異点を持つ微分方程式の研究を実施した。既約複素鏡映群の判別式の零点集合は斎藤自由因子になる。階数3のこのような判別式の零点集合に沿って特異点をもつ一意化方程式の分類をした。この結果をKyushu J. Math.に発表した。また、研究代表者が分類した単純特異点をもつ特異曲線の変形族から構成できる3次元空間の斎藤自由因子に沿って特異点をもつ階数2のホロノミック系の分類をして、解の構造も調べた。

研究成果の概要(英文)：Mainly Saito free divisors in an affine 3-dimensional space are studied. It is known that the zero set of the discriminant of any irreducible complex reflection group is a Saito free divisor. In the rank 3 case, we accomplished a classification of uniformization systems of differential equations along the zero set of discriminant. The result is published in Kyushu J. Math. There are seventeen Saito free divisors in an affine 3 dimensional space constructed by 1-parameter families of curves with simple singularities. We accomplished a classification of holonomic systems of rank 2 with singularities along such Saito free divisors.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：自由因子 一意化方程式

1. 研究開始当初の背景

斎藤自由因子は有限鏡映群の判別式の類似として斎藤恭司教授によって定式化された概念である。斎藤自由因子は、孤立特異点の半普遍変形の研究、超平面のアレンジメント、概均質ベクトル空間の軌道分解、非孤立特異点の研究などで基本的な役割を果たしている。齊次多項式や1次式の積の零点集合として定義される斎藤自由因子の例はよく知られているが、重みつき多項式の零点集合になるような例はあまり知られていない。研究代表者は約20年前に、3変数の重みつき齊次多項式でその対数的ベクトル場から定まる微分方程式系が単純になるものの分類を試みた。その結果は2009年にJ. Math. Soc. Japanに発表した。構成された斎藤自由因子は平面曲線の特異点の変形と関係することがわかり、その方向での一般化ができることがわかった。

斎藤自由因子に特異点を持つ微分方程式を構成することが次の段階の問題である。これは、斎藤が定式化した一意化方程式の類似である。特に、3変数の階数2のホロノミック系を構成することは、多変数特殊関数の例と関係するので、特殊関数の一般化としても興味がある。そのような観点から、このような微分方程式を調べることは重要であり、本研究の始める動機になった。

2. 研究の目的

本研究において、大きな問題として次をあげる。(主に3次元の場合を扱う。)

問題1. 斎藤自由因子の構成。

問題2. 求めた自由因子に関する一意化方程式を構成する。

問題3. 構成した一意化方程式の性質を調べる。

問題4. 一意化方程式の基本解から定まるシュワルツ写像の類似の逆写像を構成する。

問題5. 斎藤自由因子の補空間の基本群と一意化方程式の関係を調べる。

3. 研究の方法

問題1については、平面曲線の特異点の1パラメータ変形と3次元空間の自由因子との間に関係があるので、このアイデアに基づいて自由因子の系列を構成する。問題2については、階数3の複素鏡映群の判別式の場合に研究代表者と連携研究者である琉球大学の加藤満生教授で共同研究する。これまでに得られた成果を論文にまとめる。問題3から5までは個別の例を調べる。また進行状況によって成果を得るようにする。

4. 研究成果

(1)(研究代表者と連携研究者の加藤満生琉球大教授との共同研究)階数が n の複素既約鏡映群の判別式の零点集合はアフィン n 次元空間の斎藤自由因子になる。 $n=3$ の場合に、

これらの斎藤自由因子に沿って特異点をもつ一意化方程式を分類した。これらは本質的には2変数で解空間が3次元であるホロノミックな微分方程式系である。結果を論文(1)に発表した。

(2)4次元アフィン空間の斎藤自由因子の例をいくつか構成した。典型的な例は階数4の複素鏡映群の判別式の零点集合である。斎藤自由因子の構成法のアイデアのひとつを説明する。一般の n 次多項式の判別式を係数の多項式とみる。これは n 変数の多項式になる。係数の間に関係式を与えると変数の少ない多項式が得られるが、それを因数分解して、その因数の一部から斎藤自由因子を構成できることがある。階数4の複素鏡映群の判別式の一部はこのような手続きで求められる。さらにいくつかの場合に一意化方程式も構成した。結果は論文(2)に発表した。

(3)ある種の条件を満たす3次元アフィン空間の斎藤自由因子は17種類あることを以前に研究代表者は示した。これらの斎藤自由因子に沿って特異点をもつ階数2のホロノミック系を構成し、その解について調べた。このようなホロノミック系は一意化方程式の類似である。結果は論文(3)に発表した。

(4)正2面体群の判別式と関係する3次元斎藤自由因子に対して一意化方程式を構成し、その解と超楕円積分との関係を調べた。結果を論文(7)に発表した。

(5)特異点をもつ平面曲線から3次元斎藤自由因子を構成する方法を調べた。以前に研究代表者が発表した論文:Three dimensional Saito free divisors and singular curves(J. Siberian Federal University, Mathematics and Physics (2008)の解釈を与えている。結果はロシアのAleksandrov教授との共著として論文(6)に発表した。

(6)3次元斎藤自由因子に沿って特異点をもつ一意化方程式から自然にPainleve VI方程式の代数関数解が構成できることを連携研究者の加藤満生教授から指摘された。この事実をもとに、その逆問題を定式化した。すなわち、まずPainleve VI方程式の代数関数解をとる。これに対して、ある手続きで3次元斎藤自由因子を構成する。次にこの斎藤自由因子に沿って特異点をもつ階数2のホロノミック系を構成する。このようなホロノミック系をフックス型の2階常微分方程式の変形方程式とみて、Painleve VI方程式の代数関数解を導く。それがもとの代数関数解になるか?代数関数解の分類はほぼ完成しているので、それぞれの代数関数解に対して、この問題を調べることは可能である。種数0の代数関数解の場合には、ほとんどの場合にこの逆問題を肯定的に解決できた。種数1以上の場合には、この考えにもとづいて代数関数解から斎藤自由因子の構成はほぼできた。学会発表の(2)-(8)はこれに関連した内容である。(7)A.V.Kitaevは概Belyi関数の概念を導入し、R. Vidunasなどとの共同研究でPainleve

VI の代数関数解の構成に応用した。R. Vidunas と議論して、概 Belyi 関数と斎藤自由因子との関係があることに気づいた。概 Belyi 関数はいくつかの多項式からなる有理式で定義されるが、その一部に斎藤自由因子を定義する多項式が現れるように表示できる。このことを概 Belyi 関数が構成できているすべての場合にチェックした。学会発表(1)はこれに関連した内容である。
 (8)2012 年 11 月に、東京農工大学において Workshop on Free Divisors and Differential Equations を開催した。この機会に関連する数人の外国人研究者を招待して、研究の成果発表をしてもらい情報交換をした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 7 件)

- (1) M. Kato and J. Sekiguchi, Uniformization systems of equations with singularities along discriminant sets of complex reflection groups of rank three, *Kyushu J. Math.*, 査読有, vol.68 (2014), pp.181-221. DOI:10.2206/kyushujm.181
- (2) J. Sekiguchi, Saito free divisors in four dimensional affine space and reflection groups of rank four, *Topics on real and complex singularities*, 査読有, (2014), pp.141-158.
- (3) J. Sekiguchi, Holonomic systems of differential equations of rank two with singularities along Saito free divisors of simple type, *Topics on real and complex singularities*, 査読有, (2014), 159-188.
- (4) J. Sekiguchi, The discriminant of the reflection groups of type D4 and holonomic systems with singularities along its zero locus, 査読有, *Proceedings of the 19th ICFIDCAA Hiroshima 2011*, Edited by K. Matsuzaki and T. Sugawa, Tohoku University Press, Sendai (2013), pp.223-235. <http://www.tups.jp>
- (5) J. Sekiguchi, Remarks on an algebraic solution of Painleve sixth equation obtained by Hitchin, 査読無, *Josai Mathematical Monographs*, vol.6 (2013), pp.25-28.
- (6) A. G. Aleksandrov and J. Sekiguchi, Free deformations of hypersurface singularities, *J. Math. Sci.*, 査読有, vol.175 (2011), pp.1-16. DOI: 10.1007/s10958-011-0328-4
- (7) J. Sekiguchi, Systems of uniformization equations and hyperelliptic integrals, *J. Math. Sci.*, 査読有, vol.175 (2011), pp.57-79. DOI: 10.1007/s10958-011-0333-7

〔学会発表〕(計 18 件)

- (1) 関口次郎, Free divisors and almost Belyi maps (joint work with R. Vidunas), Accessory Parameter 研究会 熊本大学(2014 年 3 月 8 日)
- (2) 関口次郎, 自由因子の構成と微分方程式, 琉球大学理学部数理科学科談話会, 琉球大学 (2013 年 12 月 26 日)
- (3) 関口次郎, 自由因子と微分方程式, 近畿大学数学教室講演会, 近畿大学(2013 年 12 月 10 日)
- (4) J. Sekiguchi, A free divisor which gives an algebraic solution of Painleve VI equation constructed by Hitchin, The mini-symposium (Japanese-Turkish Joint Geometry Meeting), (Istanbul, Turkey) (November 25, 2013)
- (5) J. Sekiguchi, Free divisors nad differential equations, Japanese-Turkish Joint Geometry Meeting (Istanbul, Turkey) (November 24, 2103)
- (6) J. Sekiguchi, Free divisors and algebraic solutions of Painleve sixth equation, JARCS Sydney 2013 (Sydney, Australia) (September 11, 2013)
- (7) J. Sekiguchi, Free divisors, holonomic systems and algebraic solutions of Painleve VI, Seminar at Department of Mathematics, University of Seville (Seville, Spain) (March 11, 2013)
- (8) J. Sekiguchi, Free divisors, holonomic systems and algebraic solutions of Painleve sixth solution, Workshop on Free Divisors and Differential Equations, 東京農工大学 (2012 年 11 月 4 日)
- (9) 関口次郎, Free divisors, holonomic systems and algebraic Painleve sixth solutions, 古典解析セミナー (東京大学大学院数理科学研究科)(2012 年 7 月 18 日)
- (10) J. Sekiguchi, Free divisors and Painleve equation after M. Kato, Mathematics Seminar at Galatasaray University (Istanbul, Turkey) (March 20, 2011)
- (11) J. Sekiguchi, Reflection group of type D4 and holonomic systems with singularities along its discriminant locus, The 19th International Conference on Finite and Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, Aster Plaza, Hiroshima(2011 年 12 月 14 日)
- (12) J. Sekiguchi, Holonomic systems with singularities along free divisors, Local Analytic Geometry, ESI, University of Wien (Wien, Austria) (December 1, 2011)
- (13) J. Sekiguchi, Holonomic systems related to free divisors and their solutions, The 4th Japanese-Australian Workshop on real and complex singularities, Kobe Satellite of Hyogo University of

Teacher Education (2011年11月23日)

(14) 関口次郎, 二面体群に関連する超楕円積分, 保型形式の整数論月例セミナー(東京大学)(2011年11月19日)

(15) J. Sekiguchi, The discriminant of the reflection group of type D4 and holonomic systems related to its zero locus, Workshop on Accessory Parameters, 東京大学玉原国際セミナーハウス (2011年10月9日)

(16) J. Sekiguchi, Holonomic systems related with free divisors of rank three, Workshop on the Theory of Weyl Groups and Root Systems, University of Tokyo (2011年9月21日)

(17) J. Sekiguchi, A Schwarz map of Appell's F2 whose monodromy group is related to the reflection group of type D4, 古典解析セミナー (東京大学) (2011年6月24日)

(18) J. Sekiguchi, Saito free divisors and uniformization equations, Warwick Workshop on Free Divisors, University of Warwick (Warwick, England) (June 1, 2011)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

関口 次郎 (SEKIGUCHI, Jiro)

東京農工大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号: 30117717

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

加藤 満生 (KATO, Mitsuo)

琉球大学教育学部・教授

研究者番号: 50045043

原岡 喜重 (HARAOKA, Yoshishige)

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号: 30208665