

平成 26 年 5 月 16 日現在

機関番号：14503

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540087

研究課題名(和文) 解析的特異点の幾何

研究課題名(英文) Geometry of analytic singularities

研究代表者

小池 敏司 (KOIKE, SATOSHI)

兵庫教育大学・学校教育研究科(研究院)・教授

研究者番号：60161832

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：解析的特異点といえば、一般には、解析的集合の特異点や解析関数の特異点として考えられる。本研究では、両者について研究を行い、次に述べるような結果を得た。

前者については、シドニー大学の L. Paunescu 氏と一緒にその概念を導入していた点列選択性性質を持つ集合の幾何構築の基礎付けを行った。特に、点列選択性性質保存定理や特異点での横断性保存定理を示した。

一方、後者については、2変数解析関数の特異点の周りでのレベル集合の族に対して、A'Campo 曲率隆起が現れるための条件を定式化した。また、曲率集中化が起こるための条件をツリーモデルを用いて与えた。

研究成果の概要(英文)：Analytic singularity, in general, can be considered as a singular point of an analytic set or a singular point of an analytic function. In this research we discussed the both cases, and obtained the following results.

In the first case we laid the basis for the geometry of sets satisfying the Sequence Selection Property whose notion had been introduced by L. Paunescu of University of Sydney and me. In particular, we showed Sequence Selection Property Preserving Theorem and Transversality Preserving Theorem at a singular point of a set.

On the other hand, in the latter case, we formulated a condition for the appearance of A'Campo curvature bumps in a family of level curves of a two variable analytic function around a singular point of the function. In addition, we gave a condition for the appearance of concentration of curvature in the family of level curves, using the tree model of the function.

研究分野：特異点論

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：点列選択性性質 A'Campo 曲率隆起 曲率集中化 ツリーモデル

## 1. 研究開始当初の背景

海外共同研究者でオーストラリア・シドニー大学の Laurentiu Paunescu 氏との共同研究の中で、「ユークリッド空間上に原点でのリプシッツ同相写像芽と2つの部分解析的集合芽が与えられたとき、それらの部分解析的集合芽の接方向集合の共通部分の次元は、それらの部分解析的集合のそのリプシッツ同相写像による像が部分解析的であるならば、像の接方向集合の共通部分の次元に等しい」という定理を示していた。即ち、2つの部分解析的集合芽の接方向集合の共通部分の次元はリプシッツ不変量であり、解析的集合芽の族がリプシッツ自明でないことを示したりするのに有効である。この定理を示す上で重要な役目を果たした道具が、「昆布状近傍と昆布状的性質」「体積比較理論」と、この仕事の中で我々が導入した「点列選択性性質」である。この点列選択性性質を満たす集合は多くあり、具体例としては、半代数的集合、部分解析的集合、実体上のオーミニマル構造の定義可能集合、集合の錐等、特異点論において重要な研究対象になるものが挙げられる。

次に続いて、その結果を、Paunescu 氏、連携研究者の名古屋大学の塩田昌弘氏、ベトナム・ダラット大学の Ta Le Loi 氏と共同で、上の3つの道具をより広げて開発することにより、一般の実閉体上でのオーミニマル構造の定義可能集合の場合にも、接方向集合の共通部分の次元はリプシッツ不変量であることを示した(雑誌論文4)。それらの仕事を通して、点列選択性性質に関する基本的な性質をいくつか示している状況にあった。その中でも、特に重要な発見は、実閉体が完備距離空間であるときに、点列選択性性質はより力を発揮するという事実である。

上記の点列選択性性質に関する研究が部分解析的集合の特異点における幾何に対するものであるのに対し、解析関数の特異点における幾何に対する初期段階的課題としては、次のようなものを持っていた。研究代表者が海外共同研究者のフランス・アンジェ大学の Adam Parusinski 氏を訪問していたとき、スイス・ジュネーブ大学の Norbert A'Campo 氏がアンジェにやって来て、孤立特異点を持つ2変数複素解析関数について、特異点での位相不変量であるミルナー数とその周りのレベル集合族の曲率との関係に関する講演を行った。この話を海外共同研究者のオーストラリア・シドニー大学の Tzee-Char Kuo 氏に説明したところ、Kuo 氏が開発した無限小に関するテクニックを用いることにより、孤立特異点の仮定をはずした一般の場合にも、A'Campo 氏の考察を解釈できるのではないかと推察し、非常に関心を持った。そこで、多くの具体的な関数について、我々は曲率の計算を行い、曲率の隆起状況について観察を行っている状況にあ

った。

## 2. 研究の目的

上記の研究開始当初の背景の状況を踏まえて、解析的特異点の幾何の研究の目的として、集合の特異点に関しては点列選択性性質を満たす集合の幾何学を構築するための基盤となる結果を定式化し、証明することである。更に、それらの結果の、身の回りの身近な具体的事象に現れる螺旋曲線やジグザグ曲線等に対する応用を発見して、示すことである。

一方、関数の特異点の幾何に関しては、2変数実・複素解析関数の特異点の周りでのレベル集合族の曲率の隆起と集中化に対して、Kuo 氏が開発した無限小のテクニックを用いて、特徴付けや判定法を与えること、また、集中化の出現が複素の場合には位相不変量であること、実の場合にはブロー解析不変量であるかどうかを示すことなどが目的である。

## 3. 研究の方法

点列選択性性質を満たす集合の幾何学を構築する研究については、その概念を以前の接方向次元に関する共著論文の中で一緒に導入していた、シドニー大学の L. Paunescu 氏を海外共同研究者にしての共同研究を中心に据え、この方面の研究を進めた。そのため、Paunescu 氏と私が相互訪問等を通して何度も研究討議を重ねた。また、接方向次元の仕事を一般の実閉体上の話しに一般化する仕事を一緒に行った塩田昌弘氏を連携研究者にし、一般の実閉体の性質に関する専門的知識の提供を受けながら、研究を進めた。この研究は、基本的には、平成23年度の1年目と平成25年度の3年目に集中的に研究を行った。2年目の平成24年度については、何かアイデアが浮かんだときのみ、メールのやり取りを通して研究を行った。

一方、2変数実・複素解析関数の特異点の周りでのレベル集合の曲率の隆起と集中化の研究については、上の研究とは逆に、2年目の平成24年度に集中的に研究を行った。この研究については、多くの具体例の計算を一緒に行っていた T.-C. Kuo 氏を海外共同研究者に、同僚の Paunescu 氏も交えた3人の共同研究を中心に据え、この分野の研究を進めた。そのため、私がシドニー大学を訪問して、3人で多くの研究討議を行った。また、特異点論の微分幾何学への応用の研究も行い、関数のレベル集合の曲率の扱いにも手馴れている埼玉大学の福井敏純氏を連携研究者にし、応用面に関する専門的知識・コメントの提供を受けながら、研究を進めた。このことにより、新しく我々が導入した概念・用語をわかり易く整理する上で、役立つ面がある。

#### 4. 研究成果

点列選択性性質に関する研究については、その性質を満たす集合・写像に関する幾何学を構築するという目的から、接方向的集合に対する集合論的演算公式、点列選択性性質を満たす集合に関する基本的な集合論的演算公式、グラフが点列選択性性質を満たすリブシッツ同相写像による点列選択性性質構造保存定理、弱微分同相写像による点列選択性性質構造保存定理、ある種の点列選択性性質の条件のもとでの特異点を持つ集合のリブシッツ同相写像による横断性保存定理などの結果を示した。更に、この研究で得られた成果を螺旋の幾何学に応用し、螺旋の局所分類を与えた。これらの結果を Paunescu 氏との共著論文としてまとめている。この論文は雑誌論文<sup>6</sup>として出版が確定している。

また、上記の2種の点列選択性性質構造保存定理を一つのものに含めて定式化するために、点列選択性性質リブシッツ同相写像と弱微分同相写像の両者の概念を含むように緩めた接方向的同相写像の概念を導入し、この同相写像のもとでの点列選択性性質構造保存定理を示した。この結果も Paunescu 氏との共著論文としてまとめ、現在、数学専門誌に投稿中である。

一方、解析関数のレベル集合族の曲率問題に関しては、Kuo 氏、Paunescu 氏との共同研究を通して、2変数複素解析関数の特異点の周りでのレベル集合族の中に、いつ、どこで  $A'$  Campo 曲率隆起が起こるかについて、曲率テーブルランド、グラディエント・キャニオンなどの新しい概念を導入して、完全な特徴付けを与えた。この結果については、3人の共著論文として、その結果のみをまとめたものについては雑誌論文<sup>1</sup>として公表し、証明も含んだ本体の論文については、現在のところ、数学専門誌に投稿中である（その他<sup>1</sup>）。

解析関数のレベル集合族の曲率集中化の出現問題については、複素関数の場合には Kuo 氏によって導入されたツリーモデルを用いて、現れるかどうかの必要十分条件を与えた。その結果、複素の場合は、曲率集中化の出現は位相不変量であることが導かれた。実関数の場合には、実ツリーモデルを用いても曲率集中化が現われるための必要十分条件を与えることができない関数の例を構成した。その結果、実の場合は、曲率集中化の出現はブロー解析不変量ではないことが導かれた。これらの結果は、上と同様に3人の共著論文として、雑誌論文<sup>5</sup>として出版している。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

#### 〔雑誌論文〕(計 6 件)

- 1 Satoshi Koike, Tzee-Char Kuo and Laurentiu Paunescu, A study of curvature using infinitesimals, Proceedings of the Japan Academy, 88 (2012), 70-74.
- 2 Satoshi Koike, Finiteness theorem for Blow-semialgebraic triviality for a family of three-dimensional algebraic sets, Proceedings of the London Mathematical Society, 105 (2012), 506-540.
- 3 Satoshi Koike and Adam Parusinski, Equivalence relations for two variable real analytic function germs, Journal of the Mathematical Society of Japan, 65 (2013), 237-276.
- 4 Satoshi Koike, Ta Le Loi, Laurentiu Paunescu and Masahiro Shiota, Directional properties of sets definable in o-minimal structures, Annales de l'Institut Fourier, 63 (2013), 2017-2047.
- 5 Satoshi Koike, Tzee-Char Kuo and Laurentiu Paunescu, Non concentration of curvature near singular points of two variable analytic functions, Topics on Real and Complex Singularities, World Scientific, 2014, pp. 115-140.
- 6 Satoshi Koike and Laurentiu Paunescu, On the geometry of sets satisfying the sequence selection property, Journal of the Mathematical Society of Japan (掲載確定)。

#### 〔学会発表〕(計 8 件)

- 1 小池敏司, 特異点での近くでの  $A'$  Campo 曲率隆起, 研究集会「特異点とその応用」, 大分工業高等専門学校, 2011年6月1日.
- 2 小池敏司, Watt 曲線について, 研究集会「第2回神戸特異点研究会」, 兵庫教育大学神戸サテライト, 2011年7月23日.
- 3 Satoshi Koike, Blow-analytic equivalence, "Geometry Seminar", University of Sydney, 2011年8月21日.
- 4 Satoshi Koike, Equivalence relations for real analytic function germs, "Geometry Seminar", University of Sydney, 2011年9月20日.
- 5 Satoshi Koike, Sequence Selection Property and Bi-Lipschitz Homeomorphisms, "GTA Seminar", University of Sydney, 2012年9月12日.
- 6 Satoshi Koike, Sequence Selection Property and Bi-Lipschitz Homeomorphisms, International Symposium

“Topology and Geometry of Singular Spaces” (招待講演), CIRM, France, 2012年11月10日.

- 7 Satoshi Koike, Sequence Selection Property and its Applications, Symposium “A small seminar for two Dragons”, 近畿大学, 2013年2月16日.
- 8 小池敏司, 実代数曲面上定義された多項式写像族の半代数的自明性に関する有限性, 研究集会「第3回神戸特異点研究会」, 兵庫教育大学神戸ハーバーランドキャンパス, 2014年3月7日.

[図書](計 2件)

- 1 Satoshi Koike (編), Geometry on Real Closed Field and its Applications, RIMS Kokyuroku 1764, 2011.
- 2 Satoshi Koike, Toshizumi Fukui, Laurentiu Paunescu, Adam Harris and Alexander Isaev (編), Topics on Real and Complex Singularities, World Scientific, 2014.

[その他]

以下のホームページ

<http://www.sci.hyogo-u.ac.jp/koike/>  
と Math. arXiv に次の論文の PDF ファイルをおいている。

- 1 Satoshi Koike, Tzee-Char Kuo and Laurentiu Paunescu, A'Campo curvature bumps and the Dirac phenomenon near a singular point, arXiv:1206.0525
- 2 Satoshi Koike and Laurentiu Paunescu, On the geometry of sets satisfying the sequence selection property, arXiv: 1201.1669 (雑誌論文 6).
- 3 Satoshi Koike, Tzee-Char Kuo and Laurentiu Paunescu, Non concentration of curvature near singular points of two variable analytic functions, (雑誌論文 5).

6. 研究組織

(1)研究代表者

小池 敏司 (KOIKE SATOSHI)  
兵庫教育大学・大学院学校教育研究科・教授  
研究者番号 : 60161832

(2)連携研究者

福井 敏純 (FUKUI TOSHIZUMI)  
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号 : 90218892

塩田 昌弘 (SHIOTA MASAHIRO)  
名古屋大学大学院・多元数理科学研究

科・名誉教授

研究者番号 : 00027385