

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 17 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540089

研究課題名(和文)可積分測地流を巡る諸問題

研究課題名(英文)Various problems concerning integrable geodesic flows

研究代表者

清原 一吉 (Kiyohara, Kazuyoshi)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：80153245

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：可積分測地流に関わるいくつかの問題に重要な進展を与えた。具体的には、楕円体を典型例とする、ある種のリーマン多様体のクラスにおいて、一般点の共役軌の構造とその特異点の様子を明らかにした。特に分岐点においてアーノルドのD4+特異点が現れることを見いだした。また、可積分測地流を持つあるケーラー多様体のクラスと、射影同値の亜種であるC-射影同値との関係において、新たな深いつながりを見いだした。

研究成果の概要(英文)：We obtained some new results concerning integrable geodesic flows: We clarified the structure of conjugate locus and their singularities on ellipsoids and certain Riemannian manifolds with integrable geodesic flows. In particular, we found that D4+-singularity of Arnold appears at the bifurcation points. Furthermore, we found some intimate relationship between certain Kähler manifolds with integrable geodesic flows and C-projective equivalence, which seems deeper than usually recognized.

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：可積分測地流 楕円体 共役軌 リウヴィル多様体 C射影同値

### 1. 研究開始当初の背景

可積分測地流、あるいはもっと一般に可積分なハミルトン力学系の歴史は古い。解析力学が成立した後、「保存量と還元」というメカニズムが認識されてきたが、その最も極端な場合が可積分系である。この場合問題は一次元に還元され、基本的には明示的に可解である。可積分測地流に関して言えば保存量即ち第一積分の最も簡単な例はキリングベクトル場であり、回転面の場合これによって測地線の方程式は明示的に解ける。他方、楕円体の測地流が可積分であることが古くから知られており、これは一般の場合に0でないキリングベクトル場を持たない。後者の場合、既にLiouvilleにおいてその一般化の研究がなされていて、最近の私によるLiouville多様体とその複素化の研究につながっている

### 2. 研究の目的

この研究の目的は、「可積分測地流」に関わるいくつかの主要な問題に対して、明確な進展をもたらすことである。それらは大きく3つの問題に分けられる。

- (1) 高次元のコンパクトなLiouville多様体において共役跡内に現れる特異点集合の構造を完全に決定すること。特に高次元の場合は共役跡に分岐点が現れるので、その回りの様子を明らかにすること。
- (2) Liouville多様体において、ラプラス作用素の固有値分布の構造を明らかにする。特に「特異半古典近似」の高次元化を目指す。
- (3) Liouville多様体とKaehler-Liouville多様体の理論を2つの方向へ発展させる。その1つはHermite-Liouville多様体の理論の進展である。もう一つは異なる可積分測地流を持つ多様体のクラスを研究すること。

### 3. 研究の方法

最初の年度では次の3つの問題をほぼ平行して研究し、次年度以降進展のあった分野をさらに進めるといった方法をとった：

1. 楕円体を含む、ある種のLiouville多様体の一般点の共役跡の特異点集合の様子および全体の形状について調べる。
2. Liouville曲面について、ラプラス作用素の固有値分布の構造に対する(特異)半古典近似の方法についての過去の研究(清原、リウヴィル曲面における半古典近似、数理研講究録No.1119 (1999), 35--47)を整理し、これをもとに高次元化のための諸要素を研究する。
3. Hermite-Liouville多様体の理論を研究する。まず複素射影空間上に構成した大域例

をモデルにして、この部分での完全な分類を目指す。

以上の研究のため、代表者及び分担者は大学内外の研究者と適宜研究連絡を行い、研究内容についての討論を行った。

### 4. 研究成果

前々項の場合分けに応じて記す。

- (1) 楕円体を含む、ある種のLiouville多様体において、その次元を $n$ (3以上)とすると、一般点のtangentialな共役跡は(正確な表現ではないが) $n-1$ 番目までの共役跡が互いにつながっており、それ以降のものは分離していることが判った。 $n-1$ 番目までの共役跡について、その特異部分の主要部はカスプ辺であり、それらの構造について特定できた。さらにそのカスプ辺の端点は共役点に分岐するところであり、3次元ではそこにアーノルドの $D_4$ +特異点が現れること、また高次元ではそれはエッジ状に現れることを見いだした。これについて2013年7月のマルセイユにおける研究集会で報告した。また、楕円面の場合の一般化としての「糸による構成」についての論文をまとめた(プレプリント: Itoh, Kiyohara, Thread construction revisited)。これは(1)と関連する、測地線の大域的挙動の別の側面を記述するものである。
- (2) Liouville曲面について、ラプラス作用素の固有値分布の構造に対する(特異)半古典近似の方法についての過去の研究(清原、リウヴィル曲面における半古典近似、数理研講究録No.1119 (1999), 35--47)を整理し、詳しい証明をつけた論文として発表した(Diff. Geom. App. 29 (2011))。
- (3) Kaehler-Liouville多様体とC射影同値の関係性を、若干退化した場合に拡張した結果を論文にまとめた(プレプリント: Kiyohara, C-projective equivalence and integrability of the geodesic flow)。複素射影空間上定義されるHermite-Liouville多様体の分類問題については構成面においてはほぼ完全に整

理されたが、例外的なものの非存在が証明されていないため、論文になっていない。達成された主要結果は2011年のJena大学での研究集会で報告した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

1. I. B´ar´any, J. Itoh, C. Vˆilcu, T. Zamfirescu, Every point is critical, *Adv. Math.*, 235 (2013), 390-397, 査読有
2. Jin-ichi Itoh, Costin Vilcu, Continuous flattening of convex polyhedral, *Computational Geometry*, LNCS 7579, (2012), 85-97, 査読有
3. Jin-ichi Itoh, Costin Vilcu, Cut locus structures on graphs, *Discrete Math.*, 312 (2012), 524-531, 査読有
4. J. Itoh, K. Kiyohara, Cut loci and conjugate loci on Liouville surfaces, *Manuscripta Math.*, 136 (2011), 115-141, 査読有
5. K. Kiyohara, Singular semi-classical approximation on Liouville surfaces, *Differential Geometry and its Applications*, 29 (2011), S125-S134, 査読有

[学会発表](計9件)

1. 清原一吉,  $D_4$ -ラグランジュ特異点と楕円体の共役跡, 測地線と関連する諸問題, 熊本大学教育学部, 2014年1月12日
2. K. Kiyohara, Singularities of the conjugate loci on ellipsoids and certain Liouville manifolds, 2nd Conference on Finite Dimensional Integrable Systems (FDIS13), July 15-19, 2013, CIRM (Marseille), 15, July, 2013
3. 清原一吉, 楕円体の共役跡の特異点, 測地線と関連する諸問題, 熊本大学教育学部, 2013年1月14日
4. 清原一吉, h-射影同値と関連する話題, 幾何学研究集会, 2012年11月2日, 福岡大学

5. K. Kiyohara, h-projective equivalence and Kaehler-Liouville manifolds, Workshop on h-projective equivalence, June, 25, 26, 2012, Jena University, Germany

6. 清原一吉, 楕円体とリウヴィル多様体の共役跡の特異点集合, 特異点と幾何構造, 2012年5月31日, 長野市生涯学習センター

7. 清原一吉, Hermite-Liouville多様体および関連する話題, シンプレクティック幾何とその周辺(招待講演), 2011年9月10日, 岐阜経済大

8. 清原一吉, 可積分測地流を持つエルミート多様体のあるクラスについて, 幾何学的力学系の新展開, 2011年9月1日, 京都大学数理解析研究所

9. K.Kiyohara, A class of Hermitian manifolds with integrable geodesic flows, *Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics 2011 (FDIS2011)*, 28 July 2011, University of Jena, Germany

[図書](計 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等

6. 研究組織  
(1)研究代表者

( )

研究者番号：

(2)研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者

( )

研究者番号：