

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 16 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540090

研究課題名(和文)可積分等質幾何構造と不変式

研究課題名(英文)Integrable homogeneous geometric structures and invariants

研究代表者

阿賀岡 芳夫 (AGAOKA, Yoshio)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：50192894

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では等質空間上の可積分幾何構造の存在・非存在問題、及びリーマン多様体の局所等長埋め込み問題における可積分条件について、代数的な不変式論の観点から取り組んだ。更にこれらの研究の基盤となる表現論上の問題(plethysmの分解公式等)にも取り組んで、様々な成果を上げることができた。

具体的な成果としては、例えばリー群上の左不変で平坦な共形構造に対応するリー環の表現から不変式を構成することに成功し、またリーマン多様体の等長埋め込み問題に関しては4次元ユークリッド空間に超曲面として実現可能な3次元多様体の特徴付けを曲率の不変式・共変式を用いて与えることができた。

研究成果の概要(英文)：In this research we investigate the problem of the existence or non-existence of integrable geometric structures on homogeneous spaces, and also the problem of the integrability condition on local isometric imbeddings of Riemannian manifolds from the standpoint of algebraic invariant theory. In addition, we also investigate several fundamental problems on representation theory such as a decomposition formula of plethysms etc.

We obtained several results on these problems. For example, we construct a geometric invariant associated with left invariant flat conformal structures on Lie groups, and also give a necessary and sufficient condition for 3-dimensional Riemannian manifolds that are locally isometrically imbedded into the 4-dimensional Euclidean space in terms of the invariants and covariants on curvature.

研究分野：微分幾何学

キーワード：可積分条件 共形構造 平坦 plethysm ガウス方程式 不変式 等長埋め込み コダッチ方程式

1. 研究開始当初の背景

微分幾何学とは多様体上の各種幾何構造について様々な方向から研究する分野であるが、各幾何構造にはそれぞれモデル空間と呼ばれる標準的な空間が付随している。例えばリーマン幾何学の場合は標準的な計量の与えられたユークリッド空間がそれにあたり、また射影幾何学の場合は標準的なアフィン接続(の射影同値類)が与えられた射影空間がモデル空間となる。これらのモデル空間は曲率が0になるという可積分構造ととらえることができ、同様の性質をもつ空間はモデル空間以外にも数多く存在する。しかし、一般の多様体上にはこの種の幾何構造は存在しない。従っていかなる条件の下でならば可積分な幾何構造が存在するか、あるいは存在しないかを判定することが、大域微分幾何学における基本問題の一つとなる。

特に群作用をもつ等質空間の場合には、この問題は「可積分幾何構造」と代数学における「不変式・共変式」との(意外とも思われる)相関性に帰着される可能性のあることが研究代表者の過去の研究実績により暗示されていた。

また、リーマン部分多様体の観点からこの問題を見ると、リーマン多様体の可積分状態からの離れ具合が、局所等長埋め込み可能となる最小次元のユークリッド空間の次元(あるいは余次元)として解釈することが可能である。これは等長埋め込みを定める微分方程式の可解性を判定する問題であり、与えられた余次元における微分方程式の可積分条件から可解性の障害となる「不変式・共変式」(これは曲率及びその共変微分を成分としている)を具体的に記述することが大きな課題であった。

ただ、この種の微分幾何学の問題と、一方では代数学の主題である「不変式・共変式」の関連性については一般にはまだ広く認知された視点とは言い難い現状があり、具体的な研究成果を積み重ねることによって、幾何学・代数学の両世界に新たな視点を提示する必要性のあることを、研究を開始するにあたり研究代表者は強く感じとっていた。

2. 研究の目的

微分幾何学においては、古来様々な空間上の種々の幾何構造の存在・非存在性が問題にされてきた。本研究では「可積分等質な幾何構造」に焦点をあて、この幾何構造と代数的な「不変式・共変式」との関連について解明することを一つの目的とする。

平坦射影構造が存在すれば不変式が自然に構成され、更にこの構造が下部幾何構造から誘導されるか否かが不変式の多項式としての特徴で判定できるという意外な事実が研究代表者により発見されている。この幾何構造と不変式の本質的な関わりを一般の可積分等質幾何構造に拡張し、不変式が可積分幾何構造の研究において果たす役割を多方

面から解明することを目的とする。

また可積分幾何構造の一側面として、リーマン多様体の局所等長埋め込み問題の存在・非存在性にも取り組む。従来の研究では、等長埋め込みを表す偏微分方程式系の可積分条件としてガウス方程式を中心に研究がすすめられてきたが、それよりも高階の延長空間における可積分条件を不変式・共変式の言葉で表現し、その障害類を具体的なリーマン多様体に適用することを一つの目的とする。

更にこの研究を遂行する上で必要となる表現論上の幾つかの課題(plethysm と呼ばれている表現のある種の合成積の既約分解公式を求めること、不変式・共変式の表示法等)についても取り組む。

3. 研究の方法

本研究では微分幾何学における多くの課題に取り組むが、基本的な道具はリー群・リー環の表現論である。幾何構造、あるいは微分方程式の幾何学的理論においては過去にも多くの立場から表現論が有効に使われてきており、本研究もある一面ではそれを引き継ぐものであるが、従来の立場と大きく異なるのは「不変式・共変式」を前面に出して研究をすすめる視点である。そのためには、直接微分幾何学上の問題とは関わりのない表現論上の問題にも、積極的に取り組むことにする。

研究分担者の田丸氏、連携研究者の今野氏は共にリー群・リー環の表現論に造詣が深く、また研究分担者の澁谷氏は微分方程式の幾何学的理論の専門家であり、研究を遂行する過程でこれらの方々にも多くのアドバイスを頂く。近隣にいる研究者との意見交換は、研究を進めるにあたり陰に陽に大きな影響を与える重要なステップである。(実際、本研究の最終年度においては、長年の懸案であった「長大な不変式の表示法」を特別な場合に解決することができたが、この進展もこれら研究者との日常的な意見交換が implicit な支えとなっている。)

また研究を進めるにあたっては、各種研究集会に参加し、あるいは広島大学における研究集会に関連研究者に参加して頂き、活発に意見交換する場を設定する。これにより、おもいもよらぬ知見が得られることも多々あり、この種の交流は本研究のみならず今後の研究を展開する上においても大変有用なものである。

4. 研究成果

本研究期間中、下記の諸成果を得ることができた。

(1) 平坦な共形構造に関する研究。リー群上の左不変で共形平坦な構造とある条件を満たすリー環の表現との間には1対1の対応があることが知られているが、この条件を満たす表現が存在するための必要条件を

種々求めることに成功した(これが必要十分条件であるかどうかは未解決で、これは今後の研究課題である)。更にその応用として、低階のA型リー群上には、左不変で平坦な共形構造の存在しないことを示すことができた。またこの種の幾何構造が存在するリー環上には、ある性質をもつ不変式の存在を示すことができ、更にこの共形構造が下部幾何構造(定曲率リーマン計量)から誘導される場合には、この不変式が特別な形の因子を持つことを示すことができた。平坦な射影構造の場合と比べ、共形構造の場合はモデル空間の群構造が複雑であるため、不変式の構成はやや複雑なものとなる。

(2) plethysm の分解公式。本研究の随所において plethysm と呼ばれている、表現のある種の合成積の分解公式が必要となる。その基本データは冊子「Plethysm の分解式データ資料集」(〔その他〕配布印刷物)として関連研究者に配布した。この分解公式は一般の場合には未だに得られていない表現論上の未解決問題の一つであるが、 n 次元空間上の3次形式上の多項式環の場合について、各既約成分とある多面体の内部格子点との間に1対1の対応があることを示した。これにより、この場合には plethysm の既約成分の個数を表す母関数を具体的に表示することが可能となった。更に、相互律を適用することにより、一般の m 次形式が3次の不変式を持つ場合をすべて確定することができた。

(3) 4角形の相似不変量。これは予想外の成果であったが、一般の4角形(自己交差も許す)における7個の相似不変量を具体的に求め、それを用いてラングル変換(4角形の一般化された外心を用いて構成されるある種の変換)が involutive であることを不変式論的観点から記述することに成功した。この成果自体は初等幾何学の枠内に収まってしまう内容のものであるが、不変式の従属性・不変式間の恒等式を見出しながら目標とする等式を示す点において、例えば曲率テンソルの成すテンソル積空間等と類似の現象が見出され、不変式・共変式の取り扱い方について、本研究の今後の方向性を示唆してくれるよいモデルであることが判明した。

(4) ガウス方程式が可解となるための新たな条件。テンソル積空間を既約分解すると様々な既約成分が得られるが、その各既約成分とリーマン多様体の曲率テンソルの積をとった後、更にその既約成分を取り出すことにより、既約成分間のある種の線形写像を構成することができる。最初と最後の既約成分を適切に選ぶと、ガウス方程式が低次元において解を持つ場合には、この線形写像の階数が一般の場合と比べて小さくなることを発見した。具体的に余次元が3以下のところまでこのような例を見つけている。適切な既約成分を見つけるために、(2)に記載した plethysm の分解公式を活用した。ただし、実際に線形写像の階数を計算するには既約表

現空間の基底をどのように選べばよいのか、その方法が(計算機を用いたとしても)困難であり、現時点では具体的なリーマン多様体への応用が見つかっていない。これは今後の大きな課題である。

(5) R^4 に局所等長埋め込み可能な3次元リー群の分類。3次元リー群上の左不変計量の分類問題は田丸・橋永らの研究によって完成している。その分類結果に基づいて、3次元リー群の左不変計量で、局所的に4次元ユークリッド空間に等長埋め込みが可能となるものを全て求めることに成功した(これは橋永貴弘氏との共同研究)。この中には、ガウス方程式の可解性のレベルで判定できるものもあるが、その一方ガウス方程式だけでは判定できないものがあることも明らかになった。そのような計量についてはガウス方程式より更に高階の延長空間における障害テンソルを計算することにより分類を完了することができた。ここで展開した高階の延長空間における可積分条件を用いる新しい手法は、次の(6)の研究に繋がる重要な視点であり、今後更なる展開が期待されるものである。

(6) R^4 の超曲面として局所等長埋め込み可能なリーマン多様体の特徴付け。リーマン多様体が超曲面としてユークリッド空間に局所的に等長埋め込み可能となるための必要十分条件は、ガウス方程式とコダッチ方程式を満たす対称な2次対称テンソル場が存在することである。これは古典的によく知られている結果であるが、コダッチ方程式は2次対称テンソル場に関する微分方程式であるため、コダッチ方程式を直に用いて等長埋め込みの非存在性を示すことは事実上不可能である。そこで、局所等長埋め込み可能となるための必要十分条件をリーマン多様体の内在的不変量でもって表せという問題が自然に発生するが、この問いについて3次元の場合に解決することができた。(若干、例外的なケースが残されているが、一般的な3次元リーマン多様体に対しては、必要十分条件が得られた。)この場合、ガウス方程式が可解となる必要十分条件は昔から知られていたが、コダッチ方程式に相当する条件については、(5)で述べた高階の延長空間における可積分条件を曲率とその共変微分の言葉で表した Rivertz による条件式がそれによって変わる内在的条件であることを証明することができた。Rivertz の条件式は、そのまま直接書き下すと膨大な長さの共変式となり、手がつけられなくなるが、古典的不変式論でよく利用されていた記号的方法(symbolic method)をうまく活用することにより、人による手計算でこの膨大な長さの式を処理することが可能となった。この記号的方法は、この局所等長埋め込み問題のみならず、幾何学における他の様々な問題においても今後有用に働くものと期待される。

以上、本研究により予想外の成果を得ることができた面がある一方、未完了の研究課題もまだ多くある。また時間的な制約のために、未だ論文としてまとめられていない成果が多く残されている。これらについては、引き続き研究をすすめると同時に、順次研究成果を公表してゆく所存である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 16 件)

T.Hashinaga, H.Tamaru, K.Terada, Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups, *J. Math. Soc. Japan* 査読有, 68 (2016) 669-684

DOI: 10.2969/jmsj/06820669

S.Maeda, H.Tamaru, Naturally reductive homogeneous real hypersurfaces in a nonflat complex space form, *Topology its Appl. Part B* 査読有, 196 (2015) 675-683

DOI: 10.1016/j.topol.2014.01.020

S.Fujii, H.Tamaru, Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres -- Hermitian cases, *Transf. Groups* 査読有, 20 (2015) 417-436

DOI: 10.1007/s00031-015-9305-1

T.Fujimaru, A.Kubo, H.Tamaru, On totally geodesic surfaces in symmetric space of type AI, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics* 査読有, 106 (2014) 211-227

DOI: 10.1007/978-4-431-55215-4_19

C.Olmos, S.Reggiani, H.Tamaru, The index of symmetry of compact naturally reductive spaces, *Math. Z.* 査読有, 277 (2014) 611-628

DOI: 10.1007/s00209-013-1268-0

T.Noda, K.Shibuya, Rank two prolongations of second-order PDE and geometric singular solutions, *Tokyo J. Math.* 査読有, 37 (2014) 73-110

http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.tjm/1406552432

S.V.Sabau, K.Shibuya, G.Pitis, Generalized Finsler structures on closed 3-manifolds, *Tohoku Math. J.* 査読有, 66 (2014) 321-353

http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.tmj/1412783202

S.V.Sabau, K.Shibuya, H.Shimada, Metric structures associated to Finsler metrics, *Publ. Math. Debrecen* 査読有, 84 (2014) 89-103

http://www.math.klte.hu/publi/load_pdf.php?p=1852

J.Berndt, H.Tamaru, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type *J. Reine Angew. Math.*

査読有 683 (2013) 129-159

DOI: 10.1515/crelle-2012-0002

A.Kubo, H.Tamaru, A sufficient condition for congruency of orbits of Lie groups and some applications, *Geom. Dedicata* 査読有, 167 (2013) 233-238

DOI: 10.1007/s10711-012-9811-4

T.Hashinaga, A.Kubo, H.Tamaru, Some topics of homogeneous submanifolds in complex hyperbolic spaces, *Proc. Workshop on Diff. Geom. of Submanifolds and its Related Topics*, 査読有, (2013) 230-244, *World Scientific*

DOI: 10.1142/9789814566285_0020

T.Hamada, Y.Hoshikawa, H.Tamaru, Curvature properties of Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space, *J. Geometry*, 査読有, 103 (2012) 247-261

DOI: 10.1007/s00022-012-0127-1

S.V.Sabau, K.Shibuya, H.Shimada, Moving frames on generalized Finsler structures, *J. Korean Math. Soc.* 査読有, 49 (2012) 1229-1257

<http://pdf.medrang.co.kr/kms01/JKMS/49/JKMS-49-6-1229-1257.pdf>

T.Noda, K.Shibuya, Second order type-changing equations for scalar functions on a plane, *Osaka J. Math.* 査読有, 49 (2012) 101-124

http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ojm/1332337240

H.Kodama, A.Takahara, H.Tamaru, The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, *Manuscripta Math.* 査読有, 135 (2011) 229-243

DOI: 10.1007/s00229-010-0419-4

T.Noda, K.Shibuya, On implicit second-order PDE of a scalar function on a plane via differential systems, *Internat. J. Math.* 査読有, 22 (2011) 907-924

DOI: 10.1142/S0129167X11007069

〔学会発表〕(計 24 件)

阿賀岡芳夫, リーマン多様体の局所等長埋め込みの障害テンソル - 不変式・共変式をどのように表示するか, 第 23 回沼津研究会, 2016 年 3 月 8 日, 沼津工業高等専門学校

阿賀岡芳夫, Heesch 数について - タイリングできないタイル, 研究会「直観幾何学」, 2016 年 2 月 8 日, 熊本大学

橋永貴弘, 阿賀岡芳夫, リーマン多様体の局所等長埋め込みにおける高次の障害 - R^4 の超曲面の場合, 日本数学会中国四国支部会, 2016 年 1 月 24 日, 広島大学

阿賀岡芳夫, 3次元リーマン多様体の局

所等長埋め込み - 高次の障害とその応用,
合宿セミナー 2015 in 福山, 2015 年
12 月 19 日, 福山市ツネイシしまなみビ
レッジ

橋永貴弘, 阿賀岡芳夫, 3次元リー群の
局所等長埋め込み, 日本数学会秋季総合
分科会, 2015 年 9 月 13 日, 京都産業大
学

阿賀岡芳夫, リーマン多様体の等長埋め
込み問題と, その obstruction としての
可積分条件, 岐阜数理科学セミナー,
2015 年 9 月 4 日, 岐阜大学

澁谷一博, A variational problem for
curves on Finsler surfaces, 福岡幾何
学研究集会, 2015 年 10 月 31 日, 福岡大
学セミナーハウス

阿賀岡芳夫, ランゲル変換が誘導する 4
角形の相似不変量の involution, 広島幾
何学研究集会, 2014 年 10 月 9 日, 広島
大学

H.Tamaru, The space of left-invariant
metrics and submanifold geometry, AMS
Special Session on Ricci curvature for
Homogeneous Spaces and Related Topics,
2015 年 1 月 10 日, San Antonio (Texas,
USA)

H.Tamaru, The space of left-invariant
metrics, The 10-th Geometry
Conference for the Friendship between
China and Japan, 2014 年 9 月 11 日, Fudan
University (China)

H.Tamaru, Group actions on symmetric
spaces related to left-invariant
geometric structures, Development of
group actions and submanifold theory,
2014 年 6 月 25 日, 京都大学

H.Tamaru, An interaction between
geometry of left-invariant metrics and
group actions on symmetric spaces,
Submanifold Geometry and Related
Topics, 2014 年 4 月 14 日, 大阪市立大
学

澁谷一博, Fibre structures of
prolongations of third order PDEs, 淡
路島幾何学研究集会 2015, 2015 年 1 月
23 日, 淡路島・国民宿舎 慶野松原荘

K.Shibuya, Fibre structures of
prolongations of third order PDEs,
Workshop on Singularities, Geometry,
Topology and Related Topics, 2014 年 9
月 2 日, Changchun(china)

阿賀岡芳夫, Cayley-Hamilton の定理と
Amitsur-Levitzki の恒等式 - 外積代数へ
の拡張と展望, 第 21 回沼津研究会,
2014 年 3 月 7 日, 沼津工業高等専門学
校

阿賀岡芳夫, 4 角形の不変量とその応用,
研究会「直観幾何学」, 2014 年 2 月 11
日, 熊本大学

平野俊樹, 阿賀岡芳夫, 双曲平面におけ
る非周期タイリング, 日本数学会中国四

国支部会, 2014 年 1 月 26 日, 島根大学
阿賀岡芳夫, ランゲルの問題と四角形の
相似不変量, 日本数学会秋季総合分科会,
2013 年 9 月 26 日, 愛媛大学

H.Tamaru, The space of left-invariant
metrics-on a generalization of Milnor
frames, 17th International Workshop on
Differential Geometry and Related
Fields, 2013 年 9 月 30 日, NIMS(Daejeon,
韓国)

H.Tamaru, Homogeneous Ricci soliton
hypersurfaces in noncompact symmetric
spaces, Colloquium of Department of
Mathematics, 2014 年 2 月 20 日, Chonnam
National University (Gwangju, 韓国)

21 澁谷一博, Type-changing PDE and
singularities of Monge characteristic
systems, 幾何学シンポジウム, 2013 年 8
月 27 日, 東京工業大学

22 阿賀岡芳夫, ランゲルの問題と四角形の
不変量, 第 20 回沼津研究会, 2013 年 3
月 8 日, 沼津工業高等専門学校

23 阿賀岡芳夫, テンソル積空間の既約分解
と多面体の格子点, Symplectic Geometry
とその周辺, 2012 年 11 月 22 日, 秋田大
学

24 阿賀岡芳夫, テンソル空間における不変
部分多様体とその幾何学的应用, 幾何学
コロキウム, 2012 年 11 月 9 日, 北海道
大学

〔図書〕(計 3 件)

M.Kitahara, C.Czerkawski, O.Kurihara,
H.Teramoto, N.Zhang, S.Sakai,
T.Takahama, R.Wada, Y.Agaoka,
Explicit irreducible decomposition of
harmonic polynomials in the case of
 $so(p,2)$, in "Contemporary Works in
Economic Science", Kyushu Univ. Press
(2016) 117 頁 (83-109 を執筆)

M.Kitahara, T.Ogawa, K.Iyori, T.Yano,
H.Kosaka, M.Sakaguchi, M.Kodama,
S.Sakai, T.Takahama, R.Wada, Y.Agaoka,
On some properties of harmonic
polynomials in the case of $so(p,2)$:
Irreducible decomposition and
integral formulas, in "New Solutions
in Legal Informatics, Economics
Sciences and Mathematics", Kyushu
Univ. Press (2015) 152 頁 (123-142 を
執筆)

M.Kitahara, T.Ogawa, S.Sakai,
T.Takahama, R.Wada, Y.Agaoka, Some
properties of harmonic polynomials in
the case of $so(p,2)$, in "Legal
Informatics, Economic Science and
Mathematical Research", Kyushu Univ.
Press (2014) 92 頁 (81-88 を執筆)

〔その他〕

アウトリーチ活動

タイリングと三角形の幾何学, 第 11 回
JMO夏季セミナー (数学オリンピック
財団主催), 山梨県清里高原ヴィラ千ヶ
滝, 2011 年 8 月 23 日

平面と球面のタイリング, 広島大学附属
高等学校 SSH 事業 (於広島大学総合科学
部), 2011 年 11 月 14 日

2012 年度 金光学園高等学校 探求 課題
研究中間発表会, 数学ゼミ助言者, 岡山
県金光学園中学高等学校, 2012 年 6 月 6
日

数理科学実験 (タイリングの話), 広島
大学附属高等学校 SSH 事業「先端研究実
習」(於広島大学総合科学部), 2013 年 7
月 15 日

2014 年度 金光学園高等学校 理系探求
課題研究中間発表会, 数学ゼミ助言者,
岡山県金光学園中学高等学校, 2014 年 6
月 4 日

数理科学実験(3 角形・4 角形・5 角形……
円), 広島大学附属高等学校 SSH 事業「先
端研究実習」(於広島大学総合科学部),
2015 年 6 月 29 日

平成 27 年度 広島大学公開講座「数学の
基礎と展望」, タイルで世界を埋め尽く
す, 2015 年 8 月 8 日

配布印刷物

Plethysm の分解式 データ資料集,
2016 年 2 月, pp.1-174

6. 研究組織

(1) 研究代表者

阿賀岡 芳夫 (AGAOKA, Yoshio)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 5 0 1 9 2 8 9 4

(2) 研究分担者

田丸 博士 (TAMARU, Hiroshi)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 5 0 3 0 6 9 8 2

澁谷 一博 (SHIBUYA, Kazuhiro)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 0 0 5 6 9 8 3 2

(3) 連携研究者

今野 均 (KONNO, Hitoshi)
東京海洋大学・海洋工学部・教授
研究者番号: 0 0 2 9 1 4 7 7